Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Volume of an N-Simplex by Multiple Integration

For $N = 1, 2, \ldots,$ let Δ_N be the N-simplex bounded by the coordinate hyperplanes $x_1 = 0, \ldots, x_N = 0$, and the hyperplane

$$\frac{x_1}{a_1} + \cdots + \frac{x_N}{a_N} = 1 \,. \tag{1}$$

where $a_1, \ldots, a_N$ are positive numbers. Thus, Δ_N intersects the coordinate axes at the points $x_i = a_i$, $i = 1, \ldots, N$. In this note, we prove using multiple integrals that the volume of Δ_N is

$$V(\Delta_N) = \frac{\prod_{i=1}^{N} a_i}{N!} \,. \tag{2}$$

It is felt that the proof may be useful pedagogically to students in advanced calculus or in beginning analysis who are seeing integration in R^N for the first time. It was motivated by a problem in Ref. [1]; p. 560, exer. 1.

We denote by $V_N(a_1, \ldots, a_N)$ the volume of the simplex Δ_N with sides $a_1, \ldots, a_N$. Our proof is by induction on N. Since Δ_1 is a line of length a_1 and Δ_2 a right triangle with sides a_1 and a_2, formula (2) holds for $N = 1, 2$. We now assume that we have proved formula (2) for $N = 1, 2, \ldots, k$ and consider $N = k + 1$. But for $k \geq 2$

$$V_{k+1}(a_1, \ldots, a_{k+1}) = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2(1 - x_1/a_1)} \int_0^{a_3(1 - x_1/a_1 - x_2/a_2)} \cdots \int_0^{a_{k+1}(1 - x_1/a_1 - x_2/a_2 - \cdots - x_k/a_k)} dx_{k+1} \cdots dx_3\, dx_2\, dx_1 \,. \tag{3}$$

The upper limit on the integration with respect to each x_i is obtained by solving equation (1) (with $N = k + 1$) for x_i in terms of the other variables and setting $x_j = 0$ for $i < j \leq k + 1$. We make the change of variables $y_1 = x_1/a_1$, $y_2 = x_2/a_2, \ldots, y_{k+1} = x_{k+1}/a_{k+1}$, in the multiple integral in equation (3), obtaining

$$V_{k+1}(a_1, \ldots, a_{k+1}) = a_1 \cdots a_{k+1} \times \int_0^{1} \int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1-y_2)} \cdots \int_0^{(1-y_1-y_2-\cdots-y_k)} dy_{k+1} \cdots dy_3\, dy_2\, dy_1$$

$$= a_1 \cdot a_2 \ldots a_{k+1} V_{k+1}(1, \ldots, 1) \,. \tag{4}$$

The integration over y_{k+1} can be performed, and we find

$$V_{k+1}(1, \ldots, 1) =$$

$$\int_0^1 \int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1-y_2)} \int_0^{(1-y_1-y_2-\cdots-y_{k-1})} (1 - y_1 - y_2 - \cdots - y_k)\, dy_k \ldots dy_2\, dy_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1-y_2)} \int_0^{(1-y_1-y_2-\cdots-y_{k-1})} dy_k \ldots dy_2\, dy_1 - \sum_{i=1}^{k} I_i\,, \tag{5}$$

where

$$I_i = \int_0^1 \int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1-y_2)} \cdots \int_0^{(1-y_1-y_2-\cdots-y_{k-1})} y_i\, dy_k \ldots dy_2\, dy_1,\ i = 1, \ldots, k\,. \tag{6}$$

The integral in the last line of equation (5) is just $V_k(1, \ldots, 1)$, which equals $1/k!$ by the inductive hypothesis. We shall prove that

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_k = \frac{1}{(k+1)!}\,. \tag{7}$$

This will complete the proof, for by equations (4) and (5) we find that

$$V_{k+1}(a_1, \ldots, a_{k+1}) = a_1 \ldots a_{k+1} \left[\frac{1}{k!} - \frac{k}{(k+1)!}\right] = \frac{a_1 \ldots a_{k+1}}{k+1!}\,,$$

as required.

To evaluate I_1, we rewrite the upper limits in (6), obtaining

$$I_1 = \int_0^1 y_1 \left[\int_0^{(1-y_1)} \int_0^{(1-y_1)(1-y_2/(1-y_1))} \cdots \int_0^{(1-y_1)(1-y_2/(1-y_1)-\cdots-y_{k-1}/(1-y_1))} dy_k \cdots dy_2\right] dy_1\,.$$

But the expression in brackets is just $V_{k-1}(1 - y_1, \ldots, 1 - y_1)$ [see equation (3)]. Hence,

$$I_1 = \int_0^1 y_1\, V_{k-1}(1 - y_1, \ldots, 1 - y_1)\, dy_1 = \int_0^1 (1 - y_1)\, V_{k-1}(y_1, \ldots, y_1)\, dy_1$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1 - y_1)\, y_1^{k-1}\, dy_1 = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 y^{-1}\, dy_{11}^{k} - \int_0^1 y_1^k\, dy_1 = \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

The key step here is the use of the induction hypothesis in going from the second to the third equation. To show that $I_i = I_1, i = 2, \ldots, k$, we change the order of integration in I_i so that we integrate with respect to y_i last. This changes the upper limits in

(6), and the resulting expression can be evaluated by exactly the same procedure used for I_1. The proof is complete.

Richard S. Ellis*,
University of Massachusetts, Amherst, USA

*) Supported in part by National Science Foundation Grant GP-28576.

REFERENCES

[1] George B. Thomas, Jr., *Calculus and Analytic Geometry*, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1972).

Elementarmathematik und Didaktik

Eine Übertragung der Formel von Gauss-Bonnet auf ebene Netze

Bei geeigneter Übertragung der Begriffe *Gausssche Krümmung* und *geodätische Krümmung* auf ebene Netze kann man zu einer kombinatorischen Formel gelangen, die eine gewisse Analogie zur Formel von Gauss-Bonnet aufweist; bei dieser Übertragung handelt es sich um eine Diskretisierung der innergeometrischen Krümmungsbegriffe.

Für den Umfang S eines in einem 2dimensionalen Flächenstück enthaltenen Entfernungskreises mit geodätischem Radius r und Zentrum P erhält man ([3], S. 204)

$$S = 2\pi r - \frac{K_0 \pi}{3} r^3 + \cdots, \tag{1}$$

wobei K_0 die Gausssche Krümmung in P ist; K_0 ist also ein Mass für die Abweichung dritter Ordnung von S gegenüber dem Umfang eines Kreises mit demselben Radius r in der euklidischen Ebene.

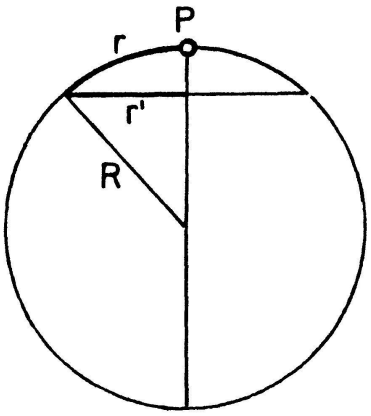

Fig. 1

Auf der Kugel mit Radius R ist die Gausssche Krümmung $K = \text{const.} = (1/R)^2$; ein Entfernungskreis mit geodätischem Radius r ($r < R\,\pi/2$) ist ein Kleinkreis mit