Konvexe Körper approximierende Polytopklassen

Autor(en): **Bokowski, Jürgen**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32157

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

The case $n=1$ corresponds to that where a polygonal cycloid is erected, toward the interior, on each side of the fixed q-gon. The (3,1)-polygonal hypocycloid consists of just three (doubly-traced) radial segments from the center of an equilateral triangle to its vertices; of course from (17) $A_h(3,1)=0$. The (4,1)-polygonal hypocycloid is a "spiked" square; the square's side length is twice that of the rolling square. The (5,1)-polygonal hypocycloid is a star-shaped figure with radial spikes; a diagram and other discussion can be found in DeTemple [2].

Douglas J. Baxter and Duane W. DeTemple, Washington State University, Pullman, USA

REFERENCES

1 D.W. DeTemple, *A Polygonal Arch Generated by Rolling a Polygon*, Amer. Math. Monthly *82*, 56–59 (1975).
2 D.W. DeTemple, *A Pentagonal Arch*, Fibonacci Q. *12*, 235–236 (1974).
3 D.W. DeTemple and M.L. Engquist, *Polygonal cycloids*, J. Recreational Math. *8*(4) (1975–76).
4 E.H. Lockwood, *A Book of Curves*, Cambridge, 1961.
5 R.C. Yates, *Rolling Polygons*, Amer. Math. Monthly *66*, 130–135 (1959).

Konvexe Körper approximierende Polytopklassen

Es bezeichne $\mathfrak{P}(m,n)$ die Klasse konvexer Polytope des dreidimensionalen euklidischen Raumes E^3, deren Ecken höchstens m-valent sind und deren Seiten höchstens n Ecken besitzen, $m \geq 3, n \geq 3$.

$\mathfrak{P}(m,n)$ heisse *approximierende Klasse der Klasse* $\mathfrak{K}$ aller konvexen Körper des E^3, wenn es zu jedem $K \in \mathfrak{K}$ eine Folge $\{P_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ konvexer Polytope $P_i \in \mathfrak{P}(m,n)$ gibt, die im Sinne der Hausdorffmetrik gegen K konvergiert.

G. Ewald hat die Frage gestellt [3], welche der Klassen $\mathfrak{P}(m,n)$ $\mathfrak{K}$ approximieren. Wir beantworten diese Frage vollständig mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz. Die Klassen $\mathfrak{P}(4,4)$, $\mathfrak{P}(3,6)$, $\mathfrak{P}(6,3)$ sind approximierende Klassen von $\mathfrak{K}$.

Bemerkung 1. Damit ist die Frage nach den approximierenden Klassen von $\mathfrak{K}$ geklärt, denn die Klassen $\mathfrak{P}(3,3)$, $\mathfrak{P}(3,4)$, $\mathfrak{P}(4,3)$, $\mathfrak{P}(3,5)$, $\mathfrak{P}(5,3)$ enthalten nur endlich viele kombinatorische Klassen konvexer Polytope und können daher nicht approximierend sein. Alle übrigen Klassen enthalten eine der im Satz aufgeführten Klassen als Teilklasse und sind daher approximierend.

Bemerkung 2. Eine weitergehende Frage für geschlossene Flächen beliebigen Geschlechts im E^3 wird mit graphentheoretischen Methoden, die bei obigem Satz zu versagen scheinen, in einer Arbeit von G. Ewald [2] behandelt.

Bemerkung 3. Die Frage von G. Ewald [3], ob es endliche approximierende Klassen der Klasse $\mathfrak{K}^n$ aller n-dimensionalen konvexen Körper, $n \geq 4$, gibt, bleibt offen.

Beweis. Da die Klasse $\mathfrak{K}'$ der streng konvexen Körper mit beliebig oft differenzierbarem Rand die gesamte Klasse der konvexen Körper approximiert, vgl. BONNESSEN-FENCHEL [1]. können wir o. E. $K \in \mathfrak{K}'$ annehmen.

Zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ werden wir zunächst zeigen, dass es ein $P = P(\varepsilon) \in \mathfrak{P}(4,4)$ gibt mit $K \subset P \subset K_\varepsilon$.

K_ρ bezeichne dabei den äusseren (inneren) Parallelkörper von K im Abstand ρ, sofern $\rho \geq 0$ ($\rho < 0$).

Wir betrachten zunächst ein reguläres $2N$-Eck $\bar{P}_N$ in der fest gewählten Ebene $E^2 \subset E^3$ und die zu den 1-Seiten von $\bar{P}_N$ gehörigen äusseren Normaleinheitsvektoren $n_j \in E^2, j = 1, \ldots, 2N$. Die Zahl $N \in \mathbf{N}$ wird später geeignet (gross) gewählt.

Die beiden zu E^2 parallelen Stützebenen an $K_{\varepsilon/2}$ schneiden $K_{\varepsilon/2}$ wegen der strengen Konvexität von $K_{\varepsilon/2}$ in jeweils genau einem Punkt A bzw. B. Wir definieren

$$\bar{K} := \operatorname{conv}(K_A, K_{\varepsilon/2}, K_B)$$

als konvexe Hülle der beiden Kugeln K_A bzw. K_B (mit Radius $\varepsilon/3$ und den Mittelpunkten A bzw. B) mit dem äusseren Parallelkörper von K im Abstand $\varepsilon/2$.

Für spätere Zwecke notieren wir: es gibt ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$K \subset \bar{K}_{-\delta} \subset \bar{K} \subset \bar{K}_\delta \subset K_\varepsilon .$$

$E_1, \ldots, E_M$ seien in natürlicher Reihenfolge angeschriebene äquidistante zu E^2 parallele Ebenen. Die Anzahl M wird später geeignet (gross) gewählt. Die erste Ebene E_1 und die letzte Ebene E_M schneide den konvexen Körper $\bar{K}$ jeweils in den kugelförmigen Enden, genauer:

$$E_k \cap (\bar{K} \setminus (K_A \cup K_B)) = \emptyset \ (k = 1, M)$$

und $E_1 \cap K_A$ sowie $E_M \cap K_B$ seien Kreise vom gleichen Durchmesser $d > 0$. Durch die Wahl der Ebenen E_i werden die zweidimensionalen Schnittkörper $k_i := E_i \cap \bar{K}$, $i = 1, \ldots, M$ definiert. Jedes k_i ist streng konvex.

Wir betrachten in jeder Ebene E_i das k_i umbeschriebene Polygon p_i, dessen Seitennormalen durch $n_j (j = 1, \ldots, 2N)$ gegeben sind. Jedes Polygon p_i hat genau $2N$ Seiten $S_{i,j}$.

Durch die konvexen Hüllen

$$h_{i,j} := \operatorname{conv}(S_{i-1,j}, S_{i,j}), \ i = 2, \ldots, M, j = 1, \ldots, 2N,$$

sowie durch p_1 und p_M wird ein konvexes Polytop $\bar{P}$ begrenzt, das bis auf die Seiten p_1 und p_M nur 2-Seiten mit genau 4 Ecken besitzt und dessen Ecken höchstens 4 valent sind.

Die Konvexität von $\bar{P}$ erkennt man wie folgt: Da $s_{i-1,j} \parallel s_{i,j}$ ist, sind die Mengen $h_{i,j}$ konvexe ebene Vierecke. Der bzgl. $\bar{K}$ äussere Stellungsvektor der durch $h_{i,j}$ aufgespannten Ebene $E_{i,j}$ werde mit $t_{i,j}$ bezeichnet.

Die Projektion zweier benachbarter Stellungsvektoren $h_{i,\cdot}$ mit gleichem ersten Index auf E^2 zeigt, dass $\bar{P}$ an der zugehörigen Kante konvex ist.

Um zu zeigen, dass $\bar{P}$ auch an den übrigen Kanten konvex ist, genügt es, den Schnitt von Ebenen mit gleichem zweiten Index j und benachbartem ersten Index zu betrachten. Diese Ebenen schneiden sich nach Konstruktion in einer Stützgeraden von $\bar{K}$. Die ebenen Vierecke haben ausserdem einen weiteren nicht auf dieser Stützgeraden liegenden Punkt mit $\bar{K}$ gemein, liegen also beide auf der gleichen Seite der Stützebene durch die betrachtete Stützgerade. Damit ist $\bar{P}$ als konvex erkannt.

Dreht man $p_k (k=1, M)$ um $\frac{\pi}{2}$ um eine durch gegenüberliegende Ecken von p_k gehende Gerade in p'_k, dann ist $D_k := \operatorname{conv}\{p_k, p'_k\} \in \mathfrak{P}(4,4)$. Durch geeignete Affinitäten a_k: $E^3 \to E^3$ $(a_k(D_k)$ muss nur hinreichend «flach» ausfallen) mit E_k als Fixebene und einer zu E_k senkrechten Affinitätsrichtung erhält man in

$$P := \operatorname{conv}\left(a_1(D_1), \bar{P}, a_M(D_M)\right)$$

ein Polytop der Klasse $\mathfrak{P}(4,4)$.

Durch genügend grosses N und geeignete Affinitäten a_1, a_M lässt sich P (unabhängig von der Wahl der Ebenen $E_i, i=1, \ldots, M$) insbesondere so konstruieren, dass $P \subset \bar{K}_{\delta(\varepsilon)}$ gilt. Andererseits kann man durch die Wahl der Ebenen E_i, insbesondere durch ihre Anzahl M immer erreichen, dass $P_{\delta(\varepsilon)} \supset \bar{K}$, d.h. $P \supset \bar{K}_{-\delta(\varepsilon)}$. Insgesamt lässt sich daher ein $P = P(\varepsilon)$ so finden, dass $K \subset P \subset K_\varepsilon$ gilt. Damit ist die Klasse $\mathfrak{P}(4,4)$ als approximierende Klasse von $\mathfrak{K}$ erkannt.

Wir denken uns nun bei der Konstruktion der k_i umbeschriebenen Polygone $p_i (i=2, \ldots, M)$ alle Seitennormalen n_j um den gleichen (kleinen) Winkel α gegenüber denen bei der Konstruktion von p_{i-1} gedreht. Damit werden die Eckpunkte von P in den Ebenen $(E_1), E_2, \ldots, E_M$ geändert.

Entsprechend führen wir die mit Hilfe von $a_k(D_k)$ $(k=1, M)$ definierten Eckpunkte von P, die nicht in einer der Ebenen $E_1, \ldots, E_M$ liegen, durch eine Drehung ϕ_k: $E^3 \to E^3$ mit $\phi_k(E_k) = E_k$ $(k=1, M)$ und $\phi_1(A) = A$, $\phi_M(B) = B$ um den Winkel $\alpha_k (\alpha_1 = -\alpha, \alpha_M = M\alpha)$ in benachbarte Punkte über.

Die konvexe Hülle aller so neu bestimmten Punkte nennen wir wieder P.

Wählt man $\alpha > 0$ genügend klein, dann sind die neu bestimmten Punkte wieder genau die Eckpunkte von P (nur wenig verrückt), und es gilt einerseits wie vorher $K \subset P \subset K_\varepsilon$, andererseits sind aber (wie man leicht erkennt), die 4-Ecke in jeweils 2 Dreiecke übergegangen und dies derart, dass in einer Ecke höchstens 6 Kanten zusammenstossen, d.h. $P \in \mathfrak{P}(6,3)$.

Durch «Abfeilen der Ecken» von P erhält man ein Polytop P' der Klasse $\mathfrak{P}(3,6)$ mit $K \subset P' \subset K_\varepsilon$. Damit ist alles gezeigt.

Jürgen Bokowski, Bochum

LITERATURVERZEICHNIS

1 T. Bonnessen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1934, 1974).

2 G. Ewald, *Über Approximation und Zellzerlegung geschlossener Flächen*, eingereicht bei Geometriae Dedicata.

3 D. Larman and C.A. Rogers, *Durham-Symposium on the Relations between infinite - and finite - dimensional Convexity.*, Bull. of the London Math. Soc. *8*, 1-33 (1976).