Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1978)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

aber B_{i-2} liegt in $(P_{i+2}P_{i-2})$]. Liegt schliesslich nur Q_{i-1} in B_{i-1} (und in H_1), so bildet $\{Q_{i-2}, S_i, Q_{i-1}, P_{i-1}, P_{i-2}\}$ ein leeres konvexes Fünfeck. - Es ist damit jetzt $g(5) \leqq 12$ bewiesen, da zwei Punkte von X_n in einem A_i immer mindestens ein konvexes Fünfeck ohne innere Punkte von X_n zur Folge hatten.
Wegen $n \geqq 10$ kann zum Abschluss nun etwa in B_{i+2}, B_{i+1}, B_i und B_{i-1} jeweils genau ein Punkt Q_{i+2}, Q_{i+1}, Q_i und Q_{i-1} von X_n angenommen werden. Sowohl B_{i+2} als auch B_{i-1} liegen ganz in $(P_{i-2}P_{i-1})$. Da G_{i+1} und G_{i-1} konvex sind, liegen B_{i+2} ganz in $(P_{i+1}M)$ und B_{i-1} ganz in (MP_{i+1}). Von Q_iQ_{i+1} wird MP_{i+1} in $(P_{i-1}P_{i-2})$ geschnitten, so dass ohne Einschränkung etwa B_{i-1} ganz in (Q_iQ_{i+1}) liegt und dann $\{Q_i, Q_{i+1}, P_{i+1}, P_i, Q_{i-1}\}$ ein leeres konvexes Fünfeck bildet. - Damit gilt $g(5) \leqq 10$, und der Satz ist bewiesen.

Heiko Harborth, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 P. Erdös: Briefliche Mitteilung.
2 P. Erdös: On some problems of elementary and combinatorial geometry. Annali Mat., series IV, V, *103*, 99-108 (1975).
3 P. Erdös und G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry. Compositio Math. *2*, 463-470 (1935).
4 P. Erdös und G. Szekeres: On extremum problems in elementary geometry. Ann. Univ. Sci. Budapest *3*, 53-62 (1960).
5 J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: On the maximum number of coplanar points containing no convex n-gons. Unveröffentlichtes Manuskript.
6 J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: A combinatorial problem on convex n-gons. In: Proc. Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, S. 180-188. Baton Rouge 1970.

Aufgaben

Aufgabe 792. Man zeige, dass die folgende Konstruktionsaufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist: Ein Dreieck aus den gegebenen Seiten b und c zu konstruieren, welches die Eigenschaft hat, dass die Seitenhalbierende von a, die Höhe auf b sowie die Winkelhalbierende von C konkurrent sind.

E. Trost, Zürich
H. Kappus, Rodersdorf

Lösung: Die in der Aufgabe genannte Konkurrenzbedingung werde kurz «Bedingung P» genannt. Wählen wir das kartesische Koordinatensystem so, dass

$$A=(b,0), \qquad B=(p,q), \qquad C=(0,0) \quad \text{mit} \quad b,p,q>0,$$

so lauten die Gleichungen für die die Strecken h_b, s_a, w_γ enthaltenden Geraden:

$$\begin{aligned} h_b&: x \qquad\qquad\qquad -p=0\\ s_a&: qx+(2b-p)y-bq=0\\ w_\gamma&: qx-(a+p)y \qquad\quad =0. \end{aligned}$$

Die Bedingung P ist somit äquivalent mit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -p \\ q & 2b-p & q \\ q & -(a+p) & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \text{d.h.:} \quad p(a+b)-ab=0. \tag{1}$$

Daraus folgt $0<p<b$. Aus (1) und aus $a^2=c^2-b^2+2bp$ ergibt sich nach Elimination von a

$$2bp^3+(c^2-6b^2)p^2+2b(2b^2-c^2)p+b^2(c^2-b^2)=0. \tag{2}$$

Speziell für $b=1$, $c=2$ erhält man die kubische Gleichung

$$f(p)=2p^3-2p^2-4p+3=0.$$

Diese hat keine rationale Lösung, da die durch die Substitution $2p=z$ entstehende Gleichung

$$z^3-2z^2-8z+12=0$$

offenbar keine ganzzahlige Lösung besitzt. Demnach sind alle Nullstellen von $f(p)$ kubische Irrationalzahlen. Eine von diesen liegt wegen $f(0)=3, f(1)=-1$ zwischen 0 und 1, so dass ein der Bedingung P genügendes Dreieck mit $b=1$, $c=2$ existiert, welches also nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Daher ist die genannte Aufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar.

Anmerkungen: 1. Sind anstelle von b und c die Seiten a und c gegeben, so zeigt man wie oben, dass die entsprechende Aufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Dagegen ergeben sich bei Vorgabe von a und b stets konstruierbare Dreiecke, wie aus (1) sofort ersichtlich ist.
2. Mit $b=1$ folgt aus (2)

$$c^2=F(p)=2(1-p)+\frac{2p-1}{(p-1)^2}; \qquad 0<p<1.$$

$F(p)$ besitzt ein Minimum $F(p_0)=c_0^2$. [p_0 ist die (einzige) Wurzel der Gleichung $(p-1)^3+p=0$, und man findet $0{,}317<p_0<0{,}318$, $0{,}762<c_0<0{,}763$.] Daraus schliesst man:

Für $c<c_0$ existiert kein Dreieck,
für $c=c_0$ existiert genau ein Dreieck,

für $c_0 < c < 1$ existieren genau zwei Dreiecke,
für $1 \leq c < \infty$ existiert genau ein Dreieck

mit der Eigenschaft P. Diejenigen Werte c, für die konstruierbare Dreiecke mit dieser Eigenschaft existieren, liegen offenbar überall dicht in $]c_0, \infty[$.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), G. Bach (Braunschweig, BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), J.T. Groenman (Groningen, NL), L. Kuipers (Mollens VS), D. Laugwitz (Darmstadt, BRD), I. Paasche (München, BRD), Problemgruppe Bern, E. Teuffel (Korntal, BRD), M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 793. Let $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denote the circulant Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Prove that the diophantine equation

$$\det A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z^k, \qquad n \geq 2, \qquad k \geq 2$$

has an infinity of solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in \mathbf{Z}^{n+1}$.

A. Grelak, A. Grytczuk, Zielona Gora, Poland

Solution: It is known and elementary that the product of two circulant matrices of the same order is another circulant matrix of the same order (for extensive properties of circulants, see [1]). Consequently, writing $(x_1, \ldots, x_n) = x$, etc., we have

$$(A(y))^k = A(x)$$

which gives the solution $z = \det A(y)$ and x is determined in terms of the arbitrary vector y.
More generally, the polynomials

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_1 + a_i x_2 + a_i^2 x_3 + \cdots + a_i^{n-1} x_n)$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are the roots of the equation

$$t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

form a multiplicative domain (see [2]), i.e.

$$P(x)P(y)=P(z).$$

Consequently, one can also obtain a n-parameter solution of the diophantine equation

$$P(x)=z^k.$$

Note that for the circulant determinant the a_i are the n-th roots of unity.

M. S. Klamkin, Edmonton, Alberta, Canada

REFERENCES

1 T. Muir, W.H. Metzler: A Treatise on the Theory of Determinants, p.445. Dover, New York 1960.
2 R.D. Carmichael: Diophantine Analysis, p.50–51. John Wiley, New York 1915.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), S. Molnar (Eger, Ungarn), S. Reichenthal (Chavannes), E. Trost (Zürich), M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 794. Im Integritätsbereich $(P, +, .)$ der formalen Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten sind Lösbarkeitskriterien für die quadratische Gleichung $\varphi^2+\alpha\varphi+\beta=0$ anzugeben. Dabei bedeuten α, β gegebene und φ eine gesuchte Potenzreihe aus P.

J. Binz, Bolligen

Lösung: Aufgrund der Identität

$$\varphi^2+\alpha\varphi+\beta=\left(\varphi+\frac{1}{2}\alpha\right)^2-\frac{1}{4}(\alpha^2-4\beta)$$

ist die Gleichung

$$\varphi^2+\alpha\varphi+\beta=0 \qquad (*)$$

genau dann in $(P, +, .)$ lösbar, wenn die Potenzreihe $\gamma=\alpha^2-4\beta$ ein Quadrat δ^2 $(\delta\in P)$ ist.
Bezeichnen c_m, d_m die Koeffizienten der Potenzreihen γ, δ, so liest man aus der Rekursionsformel

$$c_m=\sum_{k=0}^{m} d_k d_{m-k}, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

zur Ermittlung der d_m ab, dass aus $c_0=c_2=\cdots=c_{2n-2}=0$ auch das Verschwinden der $c_1, c_3, \ldots, c_{2n-1}$ und der $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ folgt und dass der erste nicht verschwindende Koeffizient c_{2n} das Quadrat einer rationalen Zahl d_n sein muss. Aus

$$c_m = \sum_{k=n}^{m-n} d_k d_{m-k}, \qquad m = 2n+1, \qquad 2n+2, \ldots$$

lassen sich dann wegen $d_n \neq 0$ die (jeweils erstmals linear auftretenden) Koeffizienten $d_{n+1}, d_{n+2}, \ldots$ als rationale Zahlen bestimmen. Das gesuchte Lösbarkeitskriterium lautet also: Die Gleichung (*) ist genau dann in $(P, +, .)$ lösbar, wenn eine der folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt ist:

1. $\alpha^2 - 4\beta = 0$. (In diesem Fall ist $\varphi = -\alpha/2$ die einzige Lösung.)
2. $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$, der erste nicht verschwindende Koeffizient dieser Reihe hat geraden Index und ist das Quadrat einer rationalen Zahl. [In diesem Fall hat (*) zwei verschiedene Lösungen.]

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), M. Vowe (Therwil BL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis 10. *April* 1979 an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 810. D_n bezeichne die Menge aller fixpunktfreien Permutationen

$$p_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

von n Elementen $1, 2, \ldots, n$. Ferner sei

$$\sigma(p_n) := \sum_{i=1}^{n} i a_i, \qquad \lambda_n := \max\{\sigma(p_n); \quad p_n \in D_n\}.$$

Für jedes $n \geq 2$ bestimme man λ_n, gebe eine Permutation q_n mit $\sigma(q_n) = \lambda_n$ an und berechne die Anzahl z_n der verschiedenen maximalen Permutationen q_n.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 811. Für alle $n \in \mathbf{N}$ beweise man

$$2n \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{2^{-2k}}{2n-2k-1} = (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \frac{2^{-2k}}{2n-2k+1}.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 812. Über den Seiten eines ebenen k-Ecks mit den (zyklisch notierten) Eckpunkten $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_k^{(1)}$ seien nach aussen gleichseitige Dreiecke $A_1^{(1)}A_2^{(1)}A_1', \ldots, A_k^{(1)}A_1^{(1)}A_k'$ errichtet. Die Seitenmitten des k-Ecks $A_1'A_2' \ldots A_k'$ bilden ein k-Eck $A_1^{(2)}A_2^{(2)} \ldots A_k^{(2)}$. Durch Wiederholung dieses Prozesses entsteht eine Folge von k-Ecken $A_1^{(n)}A_2^{(n)} \ldots A_k^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$. Man untersuche, für welche Werte von k $(k \geq 3)$ diese Folge konvergiert, und bestimme im Konvergenzfall das Grenzpolygon.

W. Moldenhauer, Rostock, DDR

Bericht

IX. Österreichischer Mathematikerkongress

Salzburg, 26.–30. September 1977

Der Einladung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) nach Salzburg folgten 650 Mathematiker mit rund 180 Begleitpersonen. Fast 500 Teilnehmer kamen aus der Bundesrepublik; dies mag wohl damit zusammenhängen, dass die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) ihre ordentliche Jahresversammlung jeweils im Rahmen der Österreichischen Mathematikerkongresse abhält.

Nicht nur die Mathematik hat Mathematiker nach Salzburg gezogen. Offensichtlich sind auch die Stadt Salzburg selbst mit ihrer einzigartigen architektonischen Kulisse und ebensosehr der Genius Loci Mozart Anreiz genug, diesen Ort aufzusuchen oder wieder neu zu entdecken. Wer sich als Tagungsteilnehmer mit zunächst ungutem Gefühl gelegentlich für ein paar Stunden von den mathematischen Vorträgen dispensiert hatte, um unter kundiger Führung eine kunsthistorische Exkursion oder einen Besuch in Mozarts Geburtshaus mitzumachen, konnte nämlich dabei immer wieder Kollegen begegnen, die sich diese einzigartigen Gelegenheiten auch nicht entgehen lassen wollten. Eine im voraus verteilte Kurzfassung aller Vorträge mag manchem Tagungsteilnehmer den Entschluss zu einem oder mehreren Abschweifern zu den grossen Barockbaumeistern oder zu Mozart erleichtert haben. Dass es den vielen Mathematikern in Salzburg sehr wohl war, konnte man täglich im Stifts-Keller oder im Müllner-Bräu feststellen, vor allem aber am offiziellen rustikalen Schlussabend im Stigl-Keller.

Zur Eröffnung des Kongresses fand man sich in der Aula der alten Universität neben der Kollegienkirche zusammen. Worte der Begrüssung sprachen die Mathematiker Prof. A. Florian (Salzburg) als örtlicher Tagungsleiter, Prof. S. Grosser