Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die auf dem Intervall $[-x_{i+1}, -\zeta]$ definierte Funktion $g_3(x):=g_2(-x)$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Hilfssatzes, also ist $\{(x+x_{i+1})g_3(x) \mid -x_{i+1} \leq x \leq -\zeta\}$ ein Intervall, folglich nach (4) auch $v([\zeta, x_{i+1}])$.
Die Intervalle $v([x_{i-1}, \zeta))$ und $v([\zeta, x_{i+1}])$ enthalten nach (4) beide die Null. Damit ist ihre Vereinigung $v([x_{i-1}, x_{i+1}])$ ebenfalls ein Intervall, also der Satz bewiesen.

A. Mrose, FU Berlin, I. Math. Inst.
W. Ripka, Lörrach

Kleine Mitteilungen

Berandete 2-Mannigfaltigkeiten aus zwei ebenen Polygonen

Geschlossene nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeiten wie z. B. projektive Ebene oder Kleinsche Flasche lassen sich bekanntlich nicht durchdringungsfrei in den dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 einbetten, während dies für berandete wie das Möbiusband ohne weiteres möglich ist.

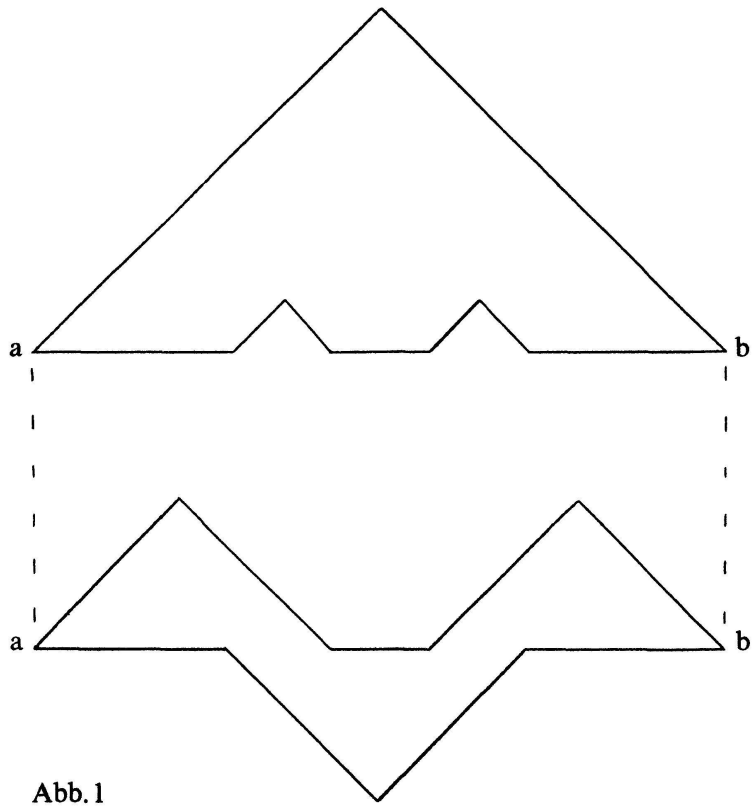

Abb. 1

Berandete 2-Mannigfaltigkeiten lassen sich sogar in zwei sich schneidende Ebenen des E^3 einbetten. Für orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten scheint diese ebenso einfache wie überraschende Eigenschaft schon länger bekannt zu sein; für nichtorientierbare offenbar nicht.

Satz. *Jede berandete topologische 2-Mannigfaltigkeit lässt sich durch zwei ebene Polygone (durchdringungsfrei) im E^3 darstellen.*

D.h. für die Mannigfaltigkeit M und die Polygone P_1, P_2 gilt: $\mathrm{set}(P_1 \cup P_2)$ homöomorph zu M. Dabei ist ein ebenes Polygon eine zusammenhängende kompakte Teilmenge der euklidischen Ebene, deren Randmenge aus endlich vielen Strecken besteht.

Beweis: Es genügt offenbar, Mannigfaltigkeiten mit einer Randkomponente zu betrachten. Wie üblich seien χ bzw. g die Eulercharakteristik bzw. das Geschlecht der 2-Mannigfaltigkeit M. Der Beweis erfolgt durch Angabe einer Konstruktion mit den erforderlichen Eigenschaften.

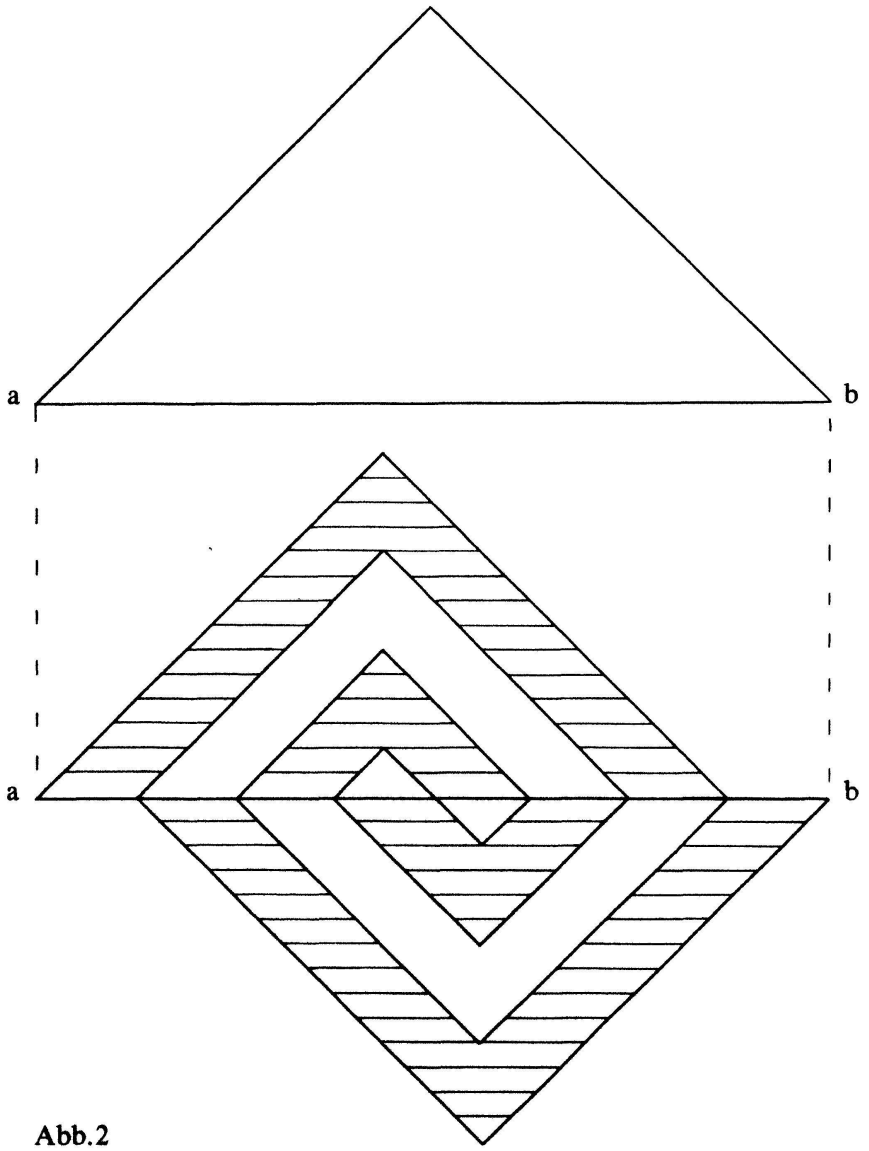

Abb.2

1. Sei M nichtorientierbar (Abb. 1 mit $g=2$). Das obere Polygon in Abb. 1 ist ein Dreieck, bei dem an der Seite ab g Dreiecke ausgespart sind.
Das untere Polygon besteht aus $g+1$ längs der Strecke ab zueinander versetzten Dreiecken. Beide Polygone haben je $3g+3$ Ecken und Kanten.
Werden beide Polygone längs der Strecke ab verheftet, so fallen $2g+2$ Ecken und $g+1$ Kanten zusammen. Man erhält eine nichtorientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente, $4g+4$ Ecken, $5g+5$ Kanten und zwei Polygonen.
Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M)=4g+4-(5g+5)+2=1-g.$$

2. Sei M orientierbar und $g>0$ (Abb. 2 mit $g=2$). Das untere Polygon in Abb. 2 besteht aus $2g$ Sechsecken, die längs der Strecke ab zueinander versetzt sind. Das obere Polygon ist ein Dreieck, das mit dem unteren längs ab verheftet wird.
Man erhält eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit mit einer Randkomponente, $8g+2$ Ecken, $12g+2$ Kanten und $2g+1$ Polygonen (von denen $2g$ in einer Ebene liegen). Mit dem Satz von Euler folgt wie verlangt:

$$\chi(M)=8g+2-(12g+2)+2g+1=1-2g.$$

J. M. Wills, Math. Inst. GH Siegen, BRD

Aufgaben

Aufgabe 801. Unter den Voraussetzungen

$$0<A<a<b<B, \tag{1}$$

$$0<m<1, \tag{2}$$

$$a^m \cdot b^{1-m}=A^{m'} \cdot B^{1-m'} \tag{3}$$

gilt die Ungleichung

$$ma+(1-m)b<m'A+(1-m')B. \tag{4}$$

Dies ist zu beweisen.

R. Boutellier, Zürich