Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

vectors defining any level curve can be constructed in the Euclidean sense. In practice, a combination of both geometric and arithmetic methods is most convenient to sketch any level curve quickly yet accurately.

Duane W. DeTemple and Donald G. Iverson, Washington State University

REFERENCES

1 D.W. DeTemple: A Geometric Method of Phase Plane Analysis. Am. Math. Monthly, *87*, 102–112 (1980).
2 D.W. DeTemple: A Graphical Analysis of 2×2 Matrices. Math. Notes from Washington State University, vol.22, No.1 (1979).
3 Howard Eves: An Introduction to the History of Mathematics, 4th ed. Holt, Rinehart and Winston, New York 1976.
4 John Wallis: Algebra, 1673 (an English translation of the relevant chapters appears in: D.E. Smith: A Source Book in Mathematics. McGraw-Hill, New York 1929).

Kleine Mitteilungen

An identity involving Ramanujan's sum

Let f be an arithmetical function and let $f'=\mu * f$ denote the Dirichlet convolution of f and the Möbius function μ:

$$f'(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right), \qquad n\geqslant 1\,.$$

A Ramanujan series is a series of the form

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q c_q(n),$$

where $c_q(n)$ is Ramanujan's sum,

$$c_q(n)=\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q}\exp\left(2\pi i\frac{hn}{q}\right),$$

and where

$$a_q=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f'(mq)}{mq}\,.$$

H. Delange proved [1] the following.

Theorem. *If* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} |f'(n)|/n < \infty$, *where* $\omega(n)$ *is the number of distinct prime divisors of* n, *then* $\sum_{q=1}^{\infty} |a_q c_q(n)| < \infty$ *for every* n, *and* $\sum_{q=1}^{\infty} a_q c_q(n) = f(n)$.

In his proof, Delange used the inequality

$$\sum_{d|k} |c_d(n)| \leq 2^{\omega(k)} n$$

(see [1], p. 263).
In this note we establish the following identity:
For positive integers k and n,

$$\sum_{d|k} |c_d(n)| = 2^{\omega\left(\frac{k}{(k,n)}\right)} (k,n). \qquad (*)$$

Proof: For any fixed positive integer n, the arithmetical function $g(k) = (k,n)$ is multiplicative:

$$(kl,n) = (k,n)(l,n) \quad \text{if} \quad (k,l) = 1.$$

Hence if F is any multiplicative arithmetical function, then (for any fixed $n \geqslant 1$), $F(k/(k,n))$ is multiplicative in k:

$$F\left(\frac{kl}{(kl,n)}\right) = F\left(\frac{k}{(k,n)}\right) F\left(\frac{l}{(l,n)}\right) \quad \text{if} \quad (k,l) = 1.$$

It follows that the right hand side of $(*)$ is multiplicative in k, for any fixed integer $n \geqslant 1$.
So is the left hand side, since $c_k(n)$, and therefore also $|c_k(n)|$ has this property ([2], theorem 67).
Thus in order to prove $(*)$, it suffices to verify it when $k = p^a$, a prime power. And indeed in this case, each side is equal to 2 if $p \nmid n$; if $p^\beta \| n$ for some $\beta \geqslant 1$, then each side is equal to $2p^\beta$ if $1 \leqslant \beta < a$, and to p^a if $\beta \geqslant a$.

Aleksandr Grytczuk, Zielona Góra, Poland

REFERENCES

1 H. Delange: On Ramanujan Expansions of Certain Arithmetical Functions. Acta Arith. *31*, 259–270 (1976).
2 G.H. Hardy and E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers, 4th ed. Oxford University Press, 1962.