Gitterwege

Autor(en): **Binz, J.C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 4

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35548

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Korollar 4. *Im Falle $X=\boldsymbol{R}^2$ erfüllt $g:\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ genau dann die Bedingungen (i) bis (iv) von Satz 1, wenn es $\gamma,\delta\in\boldsymbol{R}$ gibt mit*

$$g\big((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+\delta\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)$$

für alle $(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Beweis: Genau die Matrizen der Form $\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ -\delta & \gamma\end{pmatrix}$ $(\gamma,\delta\in\boldsymbol{R})$ kommutieren mit allen T aus $SU(2,\boldsymbol{R})$. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 2 und Satz 1c.

Bemerkung 3. Nach Korollar 3 gelten für $X=\boldsymbol{C}^2$ die Analoga zu Satz 1a,d. Nach Korollar 4 ist dies nicht der Fall für $X=\boldsymbol{R}^2$, und g ist nicht unbedingt symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Verschärft man (i) jedoch zur Invarianz gegenüber allen Drehungen von $\boldsymbol{R}^2$, so folgt $g\big((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\big)=\gamma\,(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)$ für alle (ξ_1,ξ_2), $(\eta_1,\eta_2)\in\boldsymbol{R}^2$.

Jürg Rätz, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 J. Aczél: Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3*, 309–316 (1952).
2 J. Aczél: Lectures on Functional Equations and their Applications. Academic Press, New York, San Francisco, London 1966.
3 S.K. Berberian: Introduction to Hilbert Space. Oxford University Press, New York 1961.
4 P. Klein und W. Klingenberg: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Bd.2. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1972.
5 G. Lumer: Semi-inner-product spaces. Trans. Am. Math. Soc. *100*, 29–43 (1961).

Elementarmathematik und Didaktik

Gitterwege

1. Zahlreiche kombinatorische Aufgaben gestatten eine anschauliche Interpretation im ebenen Gitter. In der Regel geht es darum, die Anzahl der Gitterwege der Länge $m+n$ von (0,0) nach (m,n) $(m,n\in\mathbf{N}_0)$ unter Einhalten gewisser Nebenbedingungen zu bestimmen; gelegentlich findet man dabei kombinatorische Identitäten, deren Nachweis auf anderem Wege komplizierter ist.
Bekannt sind die folgenden Ergebnisse ([1], S. 135–151, [2]):

a) Die Anzahl aller Wege beträgt

$$a(m,n)=\binom{m+n}{m}. \tag{1}$$

b) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=(1/k)\,x$ $(k\in\mathbf{N})$ nicht überschreiten, ist

$$b(m,n)=\binom{m+n}{m}-k\binom{m+n}{m+1}=\frac{m-kn+1}{m+1}\binom{m+n}{m},\qquad m\geq kn. \tag{2}$$

c) Die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=x+p\,(p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten, beträgt

$$c(m,n)=\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+p+1},\qquad m\geq n-p. \tag{3}$$

In dieser Note werden zwei in der obigen Zusammenstellung noch fehlende Probleme elementar gelöst.
Es bedeuten $d(m,n)$ die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=(1/k)x+p$ $(k\in\mathbf{N},p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten, und $e(m,n)$ die Anzahl aller Wege, welche die Gerade $y=kx+p\,(k\in\mathbf{N},p\in\mathbf{N}_0)$ nicht überschreiten. Es gelingt, $d(m,n)$ und $e(m,n)$ nur mit Hilfe von (1) und (2) zu berechnen.
2. Zur Bestimmung der $d(m,n)$ unterteilen wir die Menge V der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen, $V=V_1+V_2+\cdots+V_{n-p}$; V_i ist die Menge der Wege, welche die Gerade $g:ky-x-p=0$ letztmals im Punkt $(ki,i+p)$ überschreiten.
Mit (1) und (2) erhalten wir unmittelbar

$$|V_i|=\binom{(k+1)i+p-1}{ki-1}\binom{m+n-p-(k+1)i}{m-ki}\frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki}$$

und damit

$$d(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=1}^{n-p}\frac{m+1-k(n-p)}{m+1-ki}\binom{(k+1)i+p-1}{i+p}\binom{m+n-p-(k+1)i}{n-(i+p)},$$
$$m\geq k(n-p). \tag{4}$$

Der Vergleich zwischen (2) und (4) für $p=0$ führt auf die Identität

$$\frac{kn}{m+1}\binom{m+n}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m+1-kn}{m+1-ki}\binom{(k+1)i+1}{i}\binom{m+n-(k+1)i}{n-i},$$
$$m\geq kn,\qquad n\geq 1. \tag{5}$$

3. Auch zur Berechnung der $e(m,n)$ unterteilen wir die Menge V der verbotenen Wege in disjunkte Teilmengen,

$$V=V_1+V_2+\cdots+V_t,\qquad t=\left[\frac{n-1-p}{k}\right];$$

diesmal ist aber V_i die Menge der Wege, welche die Gerade $g:y=kx+p$ erstmals im Punkt $(i,ki+p)$ überschreiten. Mit den Setzungen $e(0,0)=1$ und $e_i=e(i,ki+p)$ erhalten wir

$$|V_i|=e_i\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}$$

und damit vorerst

$$e(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1-p}{k}\right]} e_i\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i}; \tag{6}$$

es bleiben nur noch die e_i zu berechnen.
W sei die Menge der zulässigen Wege von (0,0) nach $(i,ki+p)$, also $|W|=e_i$. Daneben betrachten wir die Menge W' der Gitterwege der Länge $(k+1)i+p$ von (0,0) nach $(ki+p,i)$, welche die Gerade $g':y=(1/k)x$ nicht überschreiten. Nach (2) ist

$$|W'|=\frac{p+1}{ki+p+1}\binom{(k+1)i+p}{i}.$$

Zwischen W und W' stellen wir mit der Abbildung $f(x,y)=(ki+p-y,i-x)$ eine Zuordnung her. Die Abbildung f ist offensichtlich bijektiv und gitterpunktstreu und führt horizontale (vertikale) Gitterstrecken in vertikale (horizontale) über; wegen $y\leq kx+p$ wird $i-x\leq(ki+p-y)/k$, und schliesslich gelten $f(0,0)=(ki+p,i)$ und $f(i,ki+p)=(0,0)$.
Somit ist $e_i=|W'|$, und wir haben das Ziel erreicht:

$$e(m,n)=\binom{m+n}{m}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1-p}{k}\right]}\frac{p+1}{ki+p+1}\binom{(k+1)i+p}{i}\binom{m+n-p-1-(k+1)i}{m-i},$$
$$km\geq n-p. \tag{7}$$

Der Vergleich zwischen (7) im Spezialfall $k=1$ und (3) führt auf die Identität

$$\binom{m+n}{m+p+1}=\sum_{i=0}^{n-1-p}\frac{p+1}{p+1+i}\binom{p+2i}{i}\binom{m+n-1-p-2i}{m-2i},$$
$$m\geq n-p\geq 1. \tag{8}$$

Schliesslich vergleichen wir (8) für $p=0$ und (5) für $k=1$ und gewinnen die Identität

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+i}\binom{2i}{i}\binom{m+n-1-2i}{m-i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m-n+1}{m-i+1}\binom{2i-1}{i}\binom{m+n-2i}{n-i},$$
$$m\geq n\geq 1. \tag{9}$$

J. C. Binz, Mathematisches Institut der Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Bd. 1. Stuttgart 1973.
2 J. Binz: Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen. El. Math. *32*/3 (1977).