Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl

Autor(en): **Österreicher, F. / Linhart, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-36386

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

en particulier, au centre O du rectangle, on a par (3)

$$\beta(\mu)+\beta\left(\frac{\mu}{3}\right)=h_1(O)+h_2(O)=2h(O)=\frac{1}{2}\cdot$$

D'autre part, nous avons par (4)

$$\beta(\mu)+\beta\left(\frac{1}{\mu}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \quad \beta\left(\frac{\mu}{3}\right)=\beta\left(\frac{1}{\mu}\right)\cdot$$

La fonction $\beta(\xi)$ étant biunivoque, il s'ensuit que $\mu/3=1/\mu$,

$$\mu=\sqrt{3}, \tag{5}$$

ce qui achève cette démonstration élémentaire. Elle ne fait intervenir aucune formule de Schwarz-Christoffel, aucune intégrale elliptique.

Joseph Hersch, Math. Seminar, ETH Zürich

BIBLIOGRAPHIE

1 D. Gaier: Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden. Numer. Math. 19, 179–194 (1972).
2 J. Hersch: Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme. J. reine angew. Math. *218*, 143–158 (1965).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010001-05 $1.50+0.20/0

Packungen kongruenter Stäbchen mit konstanter Nachbarnzahl

Wir betrachten – grob formuliert – folgende einfache Fragen: Gegeben sei eine beliebige Anzahl kongruenter Stäbchen (etwa Holzspachteln, wie sie bei ärztlichen Untersuchungen des Rachens verwendet werden).

A. Wie viele Stäbchen hat man herauszugreifen und wie hat man diese auf einen ebenen Tisch zu legen, so dass jedes Stäbchen die gleiche Anzahl n von Nachbarn erhält?

Ohne Zweifel werden die möglichen Lösungen wesentlich von der konstanten Nachbarnzahl n abhängen. Da die Fälle $n \leqq 2$ ziemlich trivial sind, nehmen wir im folgenden $n \geqq 3$ an.

B. Für welche Nachbarnzahlen $n \geqq 3$ gibt es Lösungen?

C. Wenn für ein bestimmtes n Lösungen existieren, welche sind (ist) die mit minimaler Stäbchenzahl? An dieser Frage wird unser Hauptinteresse liegen.

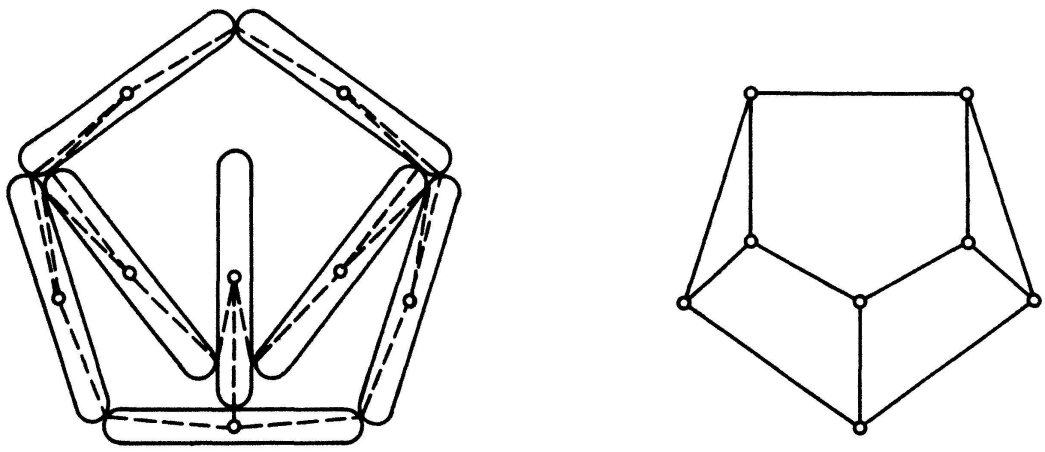
Um die obigen Begriffe zu präzisieren, folgen wir der Terminologie von L. Fejes Tóth, dessen Artikel «Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl» diese und eine Reihe anderer interessanter Fragen aufwirft.

Unseren Betrachtungen sei die euklidische Ebene zugrunde gelegt. Unter einer *Scheibe* verstehen wir eine beschränkte, offene und konvexe Punktmenge.
Eine Menge disjunkter Scheiben heisst eine *Packung*. Wenn die Ränder zweier Scheiben S_1, S_2 einer Packung nichtleeren Durchschnitt haben, so heisst S_1 *Nachbar* von S_2 (und umgekehrt). Hat in einer Packung *kongruenter* Scheiben jede Scheibe eine konstante Anzahl n von Nachbarn, so sprechen wir von einer Packung konstanter Nachbarnzahl n oder von einer *n-Nachbarnpackung*. Besonders interessieren uns Scheiben, welche aus einem Rechteck mit zwei an dessen Breitseiten aufgesetzten Halbkreisen bestehen. Solche Scheiben nennen wir *Stäbchen*.

Eine zweckmässige Vorgangsweise, die oben gestellten Fragen zu beantworten, besteht darin, jeder n-Nachbarnpackung einen ebenen Graphen zuzuordnen.

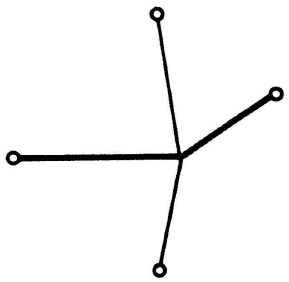
Unter einem *ebenen Graphen* verstehen wir eine endliche Menge von Punkten in der Ebene, genannt *Ecken*, zusammen mit einer Menge von (Jordanschen) Kurvenbögen, genannt *Kanten*, welche jeweils zwei Ecken verbinden. Dabei dürfen zwei Kanten höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben; Mehrfachkanten, Schlingen und Kantenüberschneidungen sind also ausgeschlossen. Bei einem ebenen Graphen kann man in natürlicher Weise von *Flächen* reden, dies sind die Zusammenhangskomponenten des Komplements der Vereinigung aller Ecken und Kanten. Wir nennen zwei ebene Graphen G und G' *äquivalent*, wenn die Ecken, Kanten und Flächen von G bijektiv den Ecken, Kanten und Flächen von G' so zugeordnet werden können, so dass alle Inzidenzen erhalten bleiben. Es ist aber durchaus möglich, dass einer beschränkten Fläche von G die unbeschränkte Fläche (die «Aussenfläche») von G' zugeordnet wird. Im folgenden wird zwischen äquivalenten Graphen meist nicht unterschieden.

Der einer n-Nachbarnpackung zugeordnete ebene Graph ist nun folgenderweise definiert. Wir wählen aus jeder Scheibe einen (inneren) Punkt aus (etwa ihren Schwerpunkt). Diese Punkte bilden die Ecken des Graphen. Zwei dieser Ecken werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Scheiben Nachbarn sind. Wir legen diese Kante so, dass sie durch einen gemeinsamen Berührungspunkt der beiden Scheiben geht und aus zwei Strecken besteht. Vgl. dazu Figur 1.

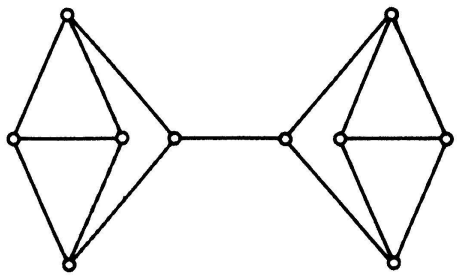


Figur 1. 3-Nachbarnpackung und zugehöriger Graph (strichliert), rechts ein dazu äquivalenter ebener Graph.

Wenn wir beliebige Scheiben zulassen, entsteht auf diese Weise allerdings im allgemeinen kein ebener Graph, da Kantenüberschneidungen auftreten können. Dies tritt zum Beispiel ein, wenn man sechs kongruente gleichseitige Dreiecke zu einem regelmässigen Sechseck zusammenlegt.
Wir betrachten deshalb von nun an nur *glatte* Scheiben, das sind solche, bei denen es in jedem Randpunkt nur eine berührende Gerade gibt. Würden einander in diesem Fall zwei der beschriebenen Kanten schneiden, dann müsste der Schnittpunkt gemeinsamer Randpunkt von vier Scheiben sein (Fig. 2), und das kann bei glatten Scheiben nicht vorkommen.
Die Anzahl der Seiten einer Fläche f wird folgendermassen definiert: Wenn eine Kante f und eine andere Fläche berandet, zählt sie als eine Seite. Berandet sie nur die Fläche f, dann zählt sie als zwei Seiten (Fig. 3).



Figur 2



Figur 3. Die Aussenfläche dieses ebenen Graphen ist ein 10-Seit.

Bezeichnen wir mit K die Anzahl der Kanten, mit F die Anzahl der Flächen und mit F_i die Anzahl der i-Seite eines ebenen Graphen, so gelten folgende leicht einzusehende Beziehungen:

$$F = \sum_{i \geqq 3} F_i, \tag{1}$$

$$2K = \sum_{i \geqq 3} i F_i. \tag{2}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass unser Graph *zusammenhängend* ist (sonst betrachten wir die einzelnen Zusammenhangskomponenten gesondert). Für zusammenhängende ebene Graphen gilt der fundamentale *Eulersche Satz*:

$$E - K + F = 2, \tag{3}$$

wobei E die Anzahl der Ecken ist.

Bei dem einer n-Nachbarnpackung zugeordneten Graphen gehen von jeder Ecke n Kanten aus (jede Ecke hat den *Grad n*), es gilt also

$$nE = 2K. \tag{4}$$

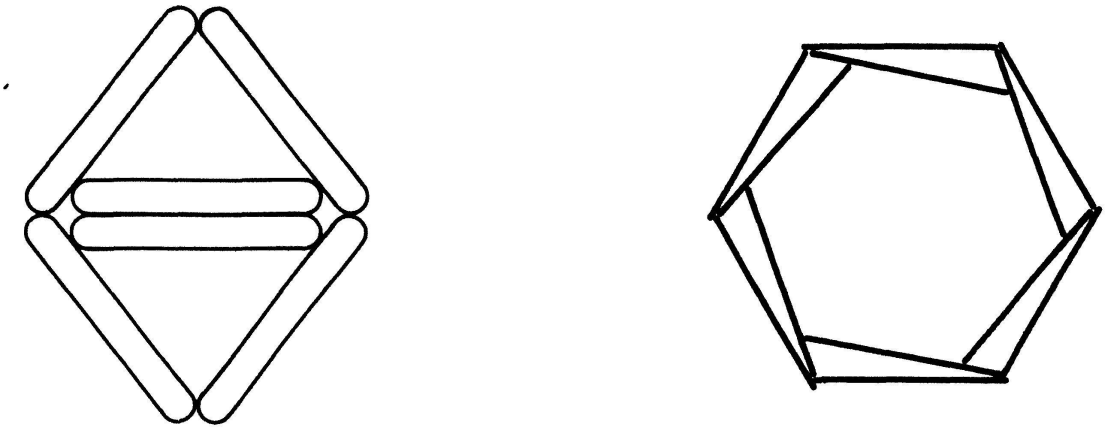
Als erste Konsequenz dieser Formeln ergibt sich folgende Teilantwort auf die Frage B:

Für $n > 6$ gibt es keine n-Nachbarnpackungen glatter Scheiben. Für $n = 6$ ist nur dann eine Lösung möglich, falls die Anzahl der Scheiben unendlich ist.

(1) und (2) ergibt nämlich $2K \geqq 3F$. Dies liefert gemeinsam mit (4) aus (3):

$$12 = 6E - 6K + 6F \leqq 6E - 2K = (6-n)E,$$

was für $n > 6$ und $n = 6$, $E < \infty$ einen Widerspruch darstellt. Eine Lösung für $n = 6$, $E = \infty$ sieht so aus: Wir betrachten kongruente Stäbchen und umschreiben jedem von ihnen ein gleichwinkliges Sechseck, so dass zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsecks das Stäbchen längs einer Strecke berühren. Ordnet man die Sechsecke so an, dass sie die Ebene bienenwabenartig überdecken, so bildet die zugehörige Anordnung der Stäbchen eine Lösung für $n = 6$, $E = \infty$.



Figur 4

L. Fejes Tóth gab in [1] Lösungen für 3- und 4-Nachbarnpackungen kongruenter Stäbchen an (Fig. 4). Für die zugehörigen Graphen gilt $E = 6$; $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ bzw. $E = 12$; $F_3 = 12$, $F_6 = 2$.
Zunächst bestanden Zweifel über die Existenz von endlichen 5-Nachbarnpackungen. Wegner [6] und Linhart [2] gaben später unabhängig voneinander Lösungen (mit $E = 32$; $F_3 = 48$, $F_8 = 2$ bzw. $E = 432$; $F_3 = 648$, $F_{108} = 2$) dafür an, wobei damals keinem der Autoren daran gelegen war, mit möglichst wenigen Stäbchen auszukommen.

Wir gehen zur systematischen Auffindung von Lösungen (mit kleiner Eckenzahl E) folgendermassen vor: Eine Folge $(E;\ F_3,\ F_4,\ \ldots)$ von ganzen Zahlen $\geqq 0$ (nur endlich viele $\neq 0$) nennen wir eine *Sequenz*.

1. Wir bestimmen zunächst Sequenzen, so dass die Gleichungen (3) und (4) erfüllt sind, wenn F und K durch (1) und (2) definiert werden. Solche Sequenzen nennen wir *mögliche Sequenzen*.
2. Da die Gleichungen (1) bis (4) nur notwendige Bedingungen für die Existenz eines ebenen Graphen zu gegebener Sequenz darstellen, sind von den möglichen Sequenzen jene zu ermitteln, welche durch einen ebenen Graphen «realisiert» werden können. Nach den Aussagen namhafter Graphentheoretiker sind zu diesem Problem kaum allgemeine Sätze bekannt, welche eine einfache Entscheidung gestatten würden. Resultate solchen Typs findet man in [5]. Wir haben daher - mit Ausnahme des Falles $n=3$, wofür in [3] ein konstruktives Vorgehen beschrieben wird - bei einzelnen Sequenzen eine Reihe von Fallunterscheidungen durchzuführen.
3. Im Falle der Existenz eines ebenen Graphen für eine bestimmte Sequenz ist entweder eine zugehörige n-Nachbarnpackung zu konstruieren oder die Existenz einer solchen Packung aus metrischen Gründen auszuschliessen.

3-Nachbarnpackungen

Aus (1) bis (4) erhält man für $n=3$:

$$12=6E-6K+6F=-2K+6F=\sum_{i\geqq 3}(6-i)F_i,$$

also

$$3F_3=12+\sum_{i\geqq 4}(i-6)F_i. \tag{3.1}$$

(2) und (4) ergibt $3E=3F_3+\sum_{i\geqq 4} iF_i$. Setzt man hier (3.1) ein, so folgt

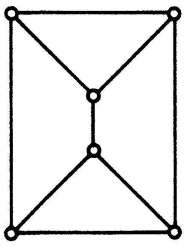
$$3(E-4)=2\sum_{i\geqq 4}(i-3)F_i. \tag{3.2}$$

Eine unmittelbare Folgerung aus (3.2) ist $E=4+2m$ mit $m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, d.h. Lösungen sind nur für eine gerade Anzahl von Scheiben möglich, was eine Teilantwort auf die Frage A für $n=3$ ist.
Die möglichen Sequenzen für $E=4$, 6 und 8 sind in Tabelle 1 (die - was die Sequenzen betrifft - vermittels eines einfachen Computerprogramms beliebig erweitert werden kann) angegeben. Von den Eintragungen in den beiden rechten Spalten unserer Tabellen werden wir hier nur die wichtigsten beweisen (für eine ausführliche Behandlung im Fall $n=3$ siehe [3]).

Tabelle 1

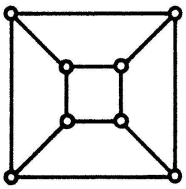
E	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	Ebener Graph?	Lösung?
4	4						Ja	Nein
6	2	3					Ja	Ja
	3	1	1				Nein	
	4			1			Nein	
8		6					Ja	Ja
	1	4	1				Nein	
	2	3		1			Nein	
	2	2	2				Ja	Ja
	3	2			1		Nein	
	3	1	1	1			Nein	
	4	1				1	Nein	
	3		3				Nein	
	4		1		1		Nein	
	4			2			Ja	Ja
	5					1	Nein	

Die minimale Scheibenanzahl einer 3-Nachbarnpackung beträgt 6.



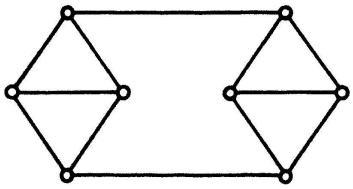
Figur 5. $E=6$; $F_3=2$, $F_4=3$.

Eine Minimallösung ist die von L. Fejes Tóth angegebene (siehe Fig. 4). Den zugehörigen Graphen zeigt Figur 5.
Es gibt zum selben Graphen noch mindestens zwei weitere Lösungen, eine davon allerdings mit dünneren Stäbchen. Die Angabe derselben und der den in Figur 6 dargestellten Graphen entsprechenden Lösungen sei dem interessierten Leser überlassen.



$E=8$; $F_4=6$

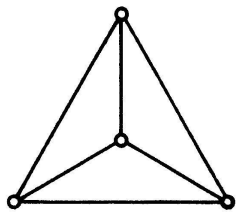
Figur 6



$E=8$; $F_3=4$, $F_6=2$

Wir wollen uns hier überlegen, dass die in Figur 4 angegebene Lösung tatsächlich minimal ist, d.h. dass der Sequenz (4; 4, 0, ...) zwar ein ebener Graph, aber keine 3-Nachbarnpackung entspricht. (Wenn man inkongruente Scheiben zulässt, existiert schon eine Lösung!)

Es gibt (bis auf Äquivalenz) nur einen ebenen Graphen mit $E=4$, $F_3=4$, nämlich den in Figur 7 dargestellten.
Drei einander berührende Scheiben müssten den drei Ecken des Aussengebiets entsprechen. Sei 1 der Durchmesser einer Scheibe. Dann ist jede Seite des aus den Berührungspunkten dieser drei «äusseren» Scheiben gebildeten Dreiecks <1. Da jede Seite dieses Dreiecks in einer der äusseren Scheiben enthalten ist, müsste die vierte Scheibe ganz innerhalb des Dreiecks liegen; dies ist aber unmöglich.



Figur 7

4-Nachbarnpackungen

Analog zu (3.1) und (3.2) lassen sich die folgenden beiden Gleichungen für $n=4$ herleiten:

$$F_3=8+\sum_{i\geqq 4}(i-4)F_i, \tag{4.1}$$

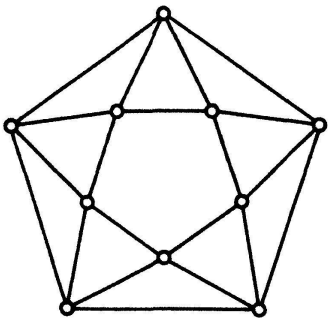
$$E-6=\sum_{i\geqq 4}(i-3)F_i, \tag{4.2}$$

wobei man die Eulersche Formel diesmal mit 4 multipliziert. Für 4-Nachbarnpackungen gibt es also für alle $E\geqq 6$ mögliche Sequenzen. Jene für $6\leqq E\leqq 10$ sind in Tabelle 2 angeführt.

Tabelle 2

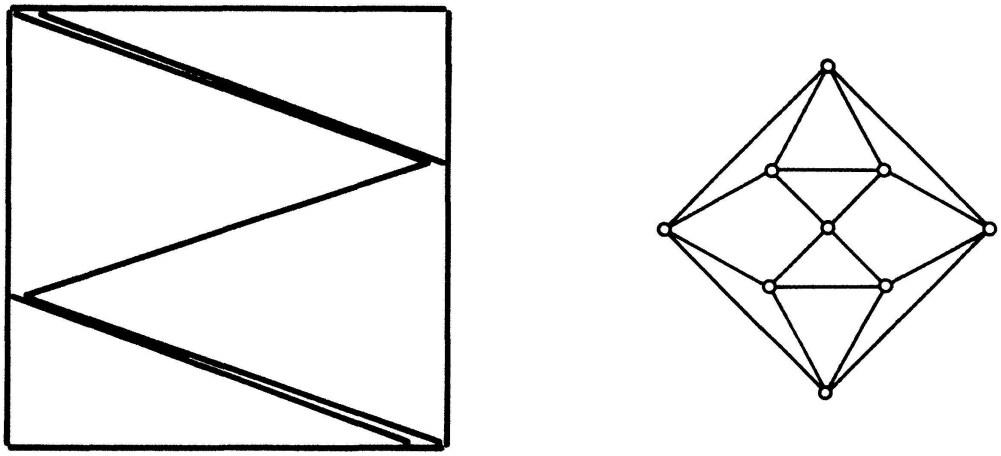
E	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	Ebener Graph?	Lösung?
6	8					Ja	Nein
7	8	1				Nein	
8	8	2				Ja	Ja
	9		1			Nein	
9	8	3				Ja	Ja
	9	1	1			Nein	
	10			1		Nein	
10	8	4				Ja	
	9	2	1			Nein	
	10	1		1		Nein	
	10		2			Ja	Ja
	11				1	Nein	

Eine vollständige Fortsetzung der vorletzten Spalte ist mit Hilfe von [7] möglich.

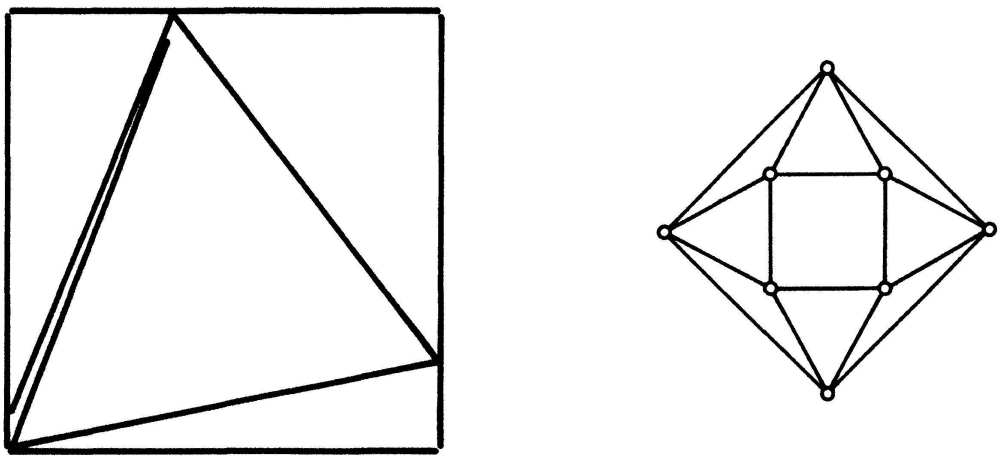


Figur 8

In Figur 8 ist ein Graph mit $E=10$; $F_3=10$, $F_5=2$ dargestellt. Die zugehörige Lösung ist von der Art der von L. Fejes Tóth in [1] angegebenen (Fig. 4).
Figur 9 zeigt einen Graphen und eine schematisch gezeichnete Lösung für $E=9$; $F_3=8$, $F_4=3$ und Figur 10 analog für $E=8$; $F_3=8$, $F_4=2$.



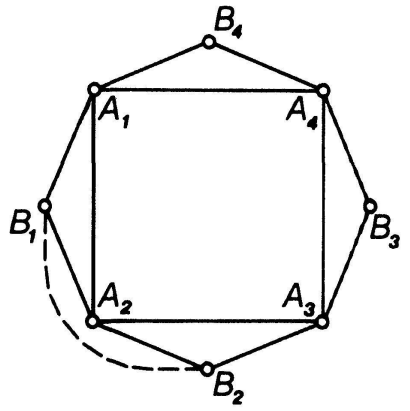
Figur 9



Figur 10

Die minimale Scheibenanzahl E einer 4*-Nachbarnpackung beträgt* 8.

Um nachzuweisen, dass die in Figur 10 dargestellte Lösung minimal ist, gilt es nur zu prüfen, dass der Sequenz $(7;8,1,0,\ldots)$ kein ebener Graph zukommt; denn der Fall $E=6$; $F_3=8$ wird genauso wie $E=3$; $F_3=4$ für 3-Nachbarnpackungen ausgeschlossen.
Gäbe es einen ebenen Graphen mit $E=7$; $F_3=8$, $F_4=1$, so könnten wir o.B.d.A. annehmen, dass das 4-Seit nicht das Aussengebiet ist. Da im weiteren nur noch 3-Seite vorkommen können und jede Ecke den Grad 4 hat, entsteht zunächst der Graph von Figur 11.



Figur 11

Gelingt es nachzuweisen, dass keine der neuen Ecken $B_1,\ldots,B_4$ mit einer anderen Ecke zusammenfällt, so haben wir bereits einen Widerspruch, nämlich $E=8>7$.
Wir betrachten die Ecke B_1. $B_1\neq A_2$ ist nach Konstruktion klar. Wäre $B_1=B_2$, so müssten auch - da unser Graph keine Mehrfachkanten besitzen darf - die Kanten (B_1,A_2) und (B_2,A_2) zusammenfallen, und A_2 hätte lediglich den Grad 3. Somit ist $B_1\neq B_2$. Wir können also B_1 und B_2 durch eine neue Kante verbinden (punktierte Linie) und erhalten ein weiteres 3-Seit. Wäre $B_1=A_3$, so erhielte man auf ähnliche Weise, dass B_2 keinen grösseren Grad als 2 haben kann. Es ist also auch $B_1\neq A_3$. Aus Symmetriegründen ergibt sich $B_1\neq A_1,B_4,A_4$. Wäre schliesslich $B_1=B_3$, so könnte B_2 nicht Grad 4 haben. Es ist somit auch $B_1\neq B_3$.
Die Nichtexistenz eines solchen ebenen Graphen wurde auch von Owens [4] bewiesen.

5-Nachbarnpackungen

Der Fall $n=5$ ist zweifellos der interessanteste. Der erste Schritt ist analog zu $n=3$ und 4 und man erhält, indem man die Eulersche Formel mit 10 multipliziert:

$$F_3=20+\sum_{i\geq 4}(3i-10)F_i, \tag{5.1}$$

$$E-12=2\sum_{i\geq 4}(i-3)F_i. \tag{5.2}$$

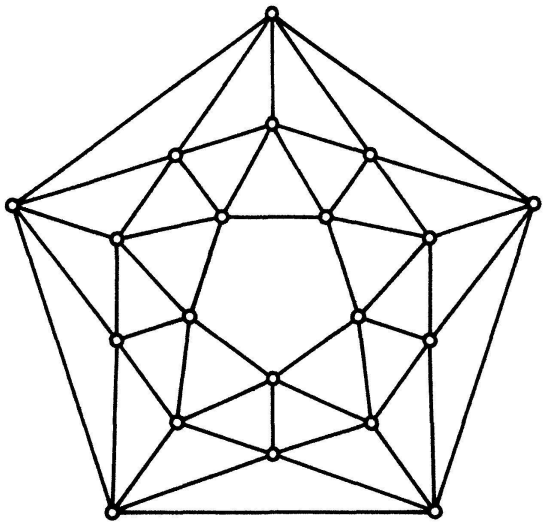
Wie im Fall $n=3$ sind nur für gerade Anzahlen E von Stäbchen Lösungen möglich, diesmal für $E \geqq 12$. Die möglichen Sequenzen für $12 \leqq E \leqq 20$ enthält Tabelle 3.

Tabelle 3

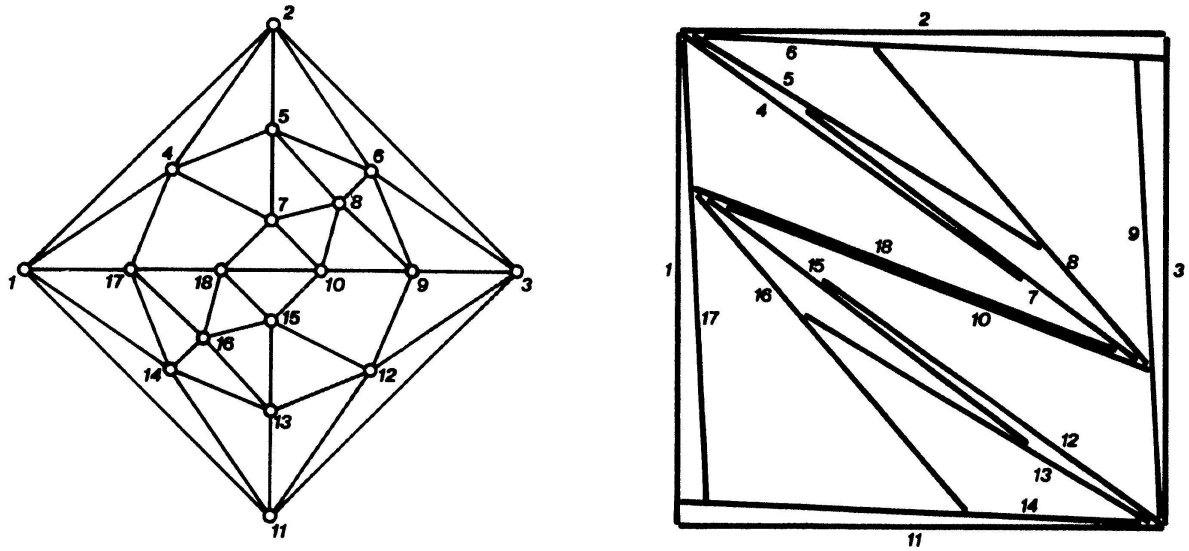
E	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	Ebener Graph?	Lösung?
12	20					Ja	Nein
14	22	1				Nein	
16	24	2				Ja	Ja
	25		1			Nein	
18	26	3				Ja	Ja
	27	1	1			Nein	
	28			1		Nein	
20	28	4				Ja	
	29	2	1			Nein	
	30	1		1		Nein	
	30		2			Ja	Ja
	31				1	Nein	

Eine teilweise Fortsetzung der vorletzten Spalte ist mit Hilfe von [8] möglich.

Figur 12 zeigt einen Graphen mit $E=20$; $F_3=30$, $F_5=2$. Die zugehörige Lösung ist von der Art der von Wegner in [6] angegebenen. Überraschend ist, dass es auch für $E=18$; $F_3=26$, $F_4=3$ eine Lösung gibt. Figur 13 zeigt einen entsprechenden Graphen. Da für die Lösung sehr dünne Stäbchen nötig sind, die teilweise sehr nahe beisammen liegen, wird in Figur 13 nur der «Typ» dieser Packung mit inkongruenten Strecken anstelle der kongruenten Stäbchen dargestellt.



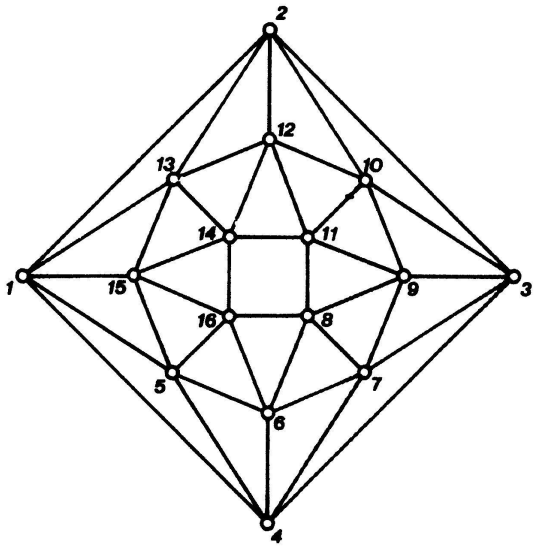
Figur 12



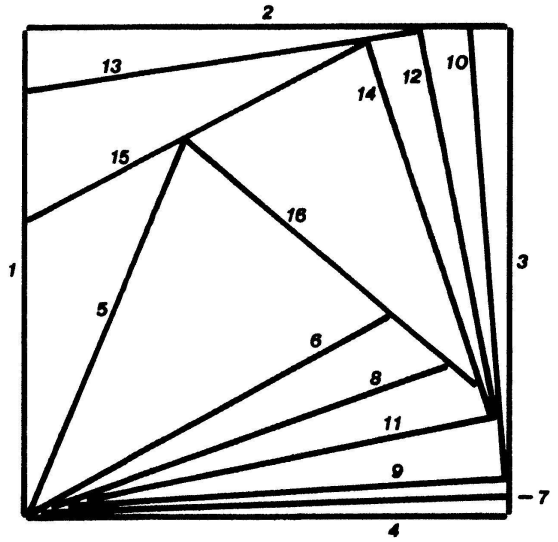
Figur 13

Die minimale Scheibenanzahl einer 5*-Nachbarnpackung beträgt* 16.

Tatsächlich gibt es für $E=16$; $F_3=24$, $F_4=2$ eine Lösung. Der Graph ist von derselben Art wie für $E=20$; $F_3=30$, $F_5=2$ (Fig. 14). Die Lösung fällt aus «Platzgründen» jedoch völlig anders aus, als es die Symmetrie des Graphen zunächst vermuten lässt. Es sind dazu ausserdem Stäbchen vonnöten, die etwa 10^{50}mal so lang wie breit sind. Wir können daher wieder nur den Typ der Lösung aufzeichnen (Fig. 15). Die Autoren haben keine Anstrengungen unternommen, einen exakten Beweis für die Existenz dieser Lösung auszuarbeiten.



Figur 14



Figur 15

Dass für $E=14$; $F_3=22$, $F_4=1$ kein ebener Graph existiert, zeigt man ähnlich wie für $E=7$; $F_3=8$, $F_4=1$ bei 4-Nachbarnpackungen (vgl. wiederum [4]). Die freilich aufwendigeren Fallunterscheidungen mögen hier unterbleiben. $E=12$; $F_3=20$ ist aus demselben Grund unrealisierbar wie $E=4$; $F_3=4$ bei $n=3$.

Anmerkung: Die Autoren danken Herrn Professor L. Fejes Tóth für die vielen interessanten Diskussionen während seines Aufenthaltes in Salzburg und für sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

F. Österreicher und J. Linhart, Universität Salzburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *20*, 375-381 (1969).
2 J. Linhart: Über einige Vermutungen von L. Fejes Tóth. Acta Math. Sci. Hung. *24*/1-2, 199-201 (1973).
3 F. Österreicher und W. Rohm: Über das Legen kongruenter Stäbchen, so dass jedes genau drei Nachbarn besitzt. Arbeitsber. Math. Inst. Univ. Salzburg *4*, 69-86 (1979).
4 A.B. Owens: On the planarity of regular incidence sequences. J. Combinat. Theory (B) *11*, 201-212 (1971).
5 E.F. Schmeichel and S.L. Hakimi: On planar graphical degree sequences. Siam J. appl. Math. *32*, 598-609 (1977).
6 G. Wegner: Bewegungsstabile Packungen konstanter Nachbarnzahl. Studia Sci. Math. Hung. *6*, 431-438 (1971).
7 P. Manca: Generating all planar graphs of degree four. J. Graph Theory *3*/4, 357-363 (1979).
8 F. Österreicher: Notizen zur Erzeugung von 5-regulären ebenen Graphen. Unveröffentlichtes Manuskript.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/010005-12 $1.50+0.20/0

Kleine Mitteilungen

Über den Rang gewisser zirkulanter Matrizen (zu Problem 764A)

Es sei stets p eine Primzahl $\neq 2$ und C_p die zirkulante Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(p-2) & 1/(p-1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(p-1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1/(p-1) & 1 & \dots & 1/(p-3) & 1/(p-2) \end{pmatrix}.$$

In [4] stellte Spindelböck die Aufgabe, den Rang von C_p in $\mathbf{Z}_p$, dem Primkörper der Charakteristik p, zu ermitteln. Hier sollen nun einige Aussagen über den fraglichen Rang abgeleitet werden; dabei wird sich zeigen, dass wir im Augenblick weit davon entfernt sind, etwa eine handliche Formel angeben zu können, die $\operatorname{Rang}(C_p)$ für jedes vorgegebene p liefert.