Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1982)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 853. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl n ein Quadrat in der kartesischen Ebene, das keine Gitterpunkte auf dem Rand und genau n Gitterpunkte im Inneren enthält?

J. Binz, Bolligen
A. Bussard, Langenthal

Lösung: Die Schar konzentrischer Quadrate mit Mittelpunkt $M=(\sqrt{2},0)$, deren Seiten normal bzw. parallel zur Ursprungsgeraden mit der Steigung $\sqrt{3}$ verlaufen, besteht aus lauter Figuren, welche auf ihrem Rand höchstens einen Gitterpunkt tragen.
Enthält nämlich die zu $y=\sqrt{3}\cdot x$ parallele Gerade g_1 den Gitterpunkt $R=(p,q)$, so heissen die Gleichungen der vier Trägergeraden von Quadratseiten (des Quadrates mit Zentrum M) der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
g_1&: \sqrt{3}\,x-y+(q-p\sqrt{3})=0,\\
g_2&: x+\sqrt{3}\,y+(\sqrt{6}-\sqrt{2}+q-p\sqrt{3})=0,\\
g_3&: \sqrt{3}\,x-y+(p\sqrt{3}-q-2\sqrt{6})=0,\\
g_4&: x+\sqrt{3}\,y+(p\sqrt{3}-q-\sqrt{6}-\sqrt{2})=0.
\end{aligned}$$

Aus der Inkommensurabilität von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{6}$ folgt dann, dass g_2, g_3 und g_4 keine Gitterpunkte enthalten.
Genauso schliesst man, wenn man mit einer zur Ursprungsgeraden $y=\sqrt{3}\cdot x$ normalen Geraden g_1^* durch R beginnt. Damit ist aber die Existenz von Quadraten, wie in der Aufgabenstellung verlangt, bereits gesichert; denn bläst man ein solches Quadrat auf (Streckung von M aus!), so kommt bei diesem Vergrösserungsprozess jeweilen nur genau ein neuer Gitterpunkt von aussen nach innen.

Hj. Stocker, Wädenswil

Anmerkung der Redaktion: Verschiedene Leser weisen darauf hin, dass die Aufgabe nicht neu ist.

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Sierpinski: Sur quelques problèmes concernant les points aux coordonnées entières. Enseign. Math. 4, 25–31 (1958).
2 Ross Honsberger: Mathematical Gems I. Dolciani Mathematical Expositions No. 1. The Mathematical Association of America, S. 121f. (1973).

Weitere Lösungen sandten P. Hohler (Olten), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), J. Jesinghaus (Bornheim, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), A. Makowski (Warszawa, PL), H. Walser (Frauenfeld).

Aufgabe 854. Die n-fache Summe

$$\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=2}^{\infty}\binom{k_1}{2}^{-1}\binom{k_1+k_2}{2}^{-1}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{2}^{-1}; \qquad n\in\mathbf{N}$$

ist geschlossen auszuwerten.

I. Paasche, München, BRD

Solution: Put

$$f_n(m):=\sum_{k_1=m}^{\infty}\binom{k_1}{2}^{-1}\sum_{k_2=2}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=2}^{\infty}\binom{k_1+k_2}{2}^{-1}\cdots\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{2}^{-1},$$

a slightly more general sum. Then

$$f_n(m)-f_n(m+1)=\binom{m}{2}^{-1}f_{n-1}(m+2). \tag{*}$$

We claim

$$f_n(m)=\frac{2^n(m-2)!}{n!\,(m-2+n)!}. \tag{**}$$

The proof is by induction on n. Clearly

$$f_1(m)=2\sum_{k=m}^{\infty}\left\{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right\}=\frac{2}{m-1},$$

as required. In view of (*)

$$f_n(m)=\sum_{k=m}^{\infty}\{f_n(k)-f_n(k+1)\}=\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{2}^{-1}f_{n-1}(k+2)$$

and an induction hypothesis can be applied. We obtain

$$\begin{aligned}f_n(m)&=\frac{2^n}{n!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{n}{(k-1)k(k+1)\cdots(k+n-1)}\\&=\frac{2^n}{n!}\sum_{k=m}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k-1)k\cdots(k+n-2)}-\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+n-1)}\right\}\\&=\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{1}{(m-1)m\cdots(m+n-2)}=\frac{2^n(m-2)!}{n!\,(m+n-2)!},\end{aligned}$$

in accordance with (**). Thus (**) holds for all n (and all m).

In particular

$$f_n(2)=\frac{2^n}{(n!)^2},$$

the value of the given sum.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Gloggengiesser (Vaterstetten, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), L. Kuipers (Mollens VS), Hj. Stocker (Wädenswil), W. Volgmann (Bochum, BRD).

Aufgabe 855. Es sei t eine reelle Zahl mit $0<t<1$. Einer beliebigen (reellen oder komplexen) Nullfolge (a_n) werde die folgendermassen definierte reelle Zahl $k((a_n))$ zugeordnet: Nach Wahl von $\varepsilon>0$ bezeichne $N((a_n),\varepsilon)$ die kleinste der natürlichen Zahlen m mit der Eigenschaft

$$n\geqslant m\Rightarrow |a_n|<\varepsilon.$$

Dann sei

$$k((a_n)):=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{N((a_n),\varepsilon)}{N((a_n),t\varepsilon)}.$$

Mań zeige: Zu jedem $\lambda\in[0,1]$ existieren Nullfolgen (a_n) mit $k((a_n))=\lambda$.

H. Kappus, Rodersdorf

Lösung: Wir zeigen $k((2^{-n}))=1$, ferner $k((n^{-(\log t)/(\log\lambda)}))=\lambda$ für jedes reelle $\lambda\in(0,1)$ und schliesslich $k((1/(\log n)))=0$ und haben dann die Behauptung bewiesen.

Da wir an $\varepsilon\to 0$ interessiert sind, dürfen wir von vornherein stets $\varepsilon\in(0,1)$ voraussetzen. Im ersten Fall ist m definiert durch $2^{-m}<\varepsilon\leqslant 2^{1-m}$, woraus

$$m+1>\frac{\log\varepsilon^{-1}}{\log 2}+1\geqslant m,\qquad \text{also}\quad N((2^{-n}),\varepsilon)=1+\left[\frac{\log\varepsilon^{-1}}{\log 2}\right]$$

und somit

$$N((2^{-n}),t\varepsilon)=1+\left[\frac{\log\varepsilon^{-1}}{\log 2}+\frac{\log t^{-1}}{\log 2}\right]$$

folgt, was unmittelbar zu $k((2^{-n}))=1$ führt. Im zweiten Fall schreiben wir

$$s:=\frac{\log t}{\log\lambda}\in\mathbf{R}^+;$$

hier ist m durch $m^{-s} < \varepsilon \leqslant (m-1)^{-s}$ definiert, also

$$N((n^{-s}),\varepsilon) = 1 + [\varepsilon^{-1/s}], \qquad N((n^{-s}),t\varepsilon) = 1 + [\varepsilon^{-1/s} t^{-1/s}] = 1 + [\varepsilon^{-1/s} \lambda^{-1}],$$

was hier die Behauptung ergibt. Im letzten Fall zeigt man analog

$$N\left(\left(\frac{1}{\log n}\right),\varepsilon\right) = 1 + [e^{1/\varepsilon}] = e^{1/\varepsilon} + O(1), \qquad N\left(\left(\frac{1}{\log n}\right),t\varepsilon\right) = 1 + [e^{1/(t\varepsilon)}]$$
$$= e^{1/(t\varepsilon)} + O(1)$$

jeweils bei $\varepsilon \to 0$, was via

$$N\left(\left(\frac{1}{\log n}\right),\varepsilon\right) \Big/ N\left(\left(\frac{1}{\log n}\right),t\varepsilon\right) \sim \exp\left(-\left(\frac{1}{t}-1\right)\frac{1}{\varepsilon}\right) \to 0$$

zur letzten Behauptung führt.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1982* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 873. Prove that if $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ and $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$, $n \in \mathbf{N}$, then

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+s-x_i} + \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \leqslant 1.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

Aufgabe 874. Gegeben sind drei konzentrische Kreise mit Radien r_1, r_2, r_3, deren Ebenen paarweise zueinander senkrecht sind. Existiert ein Dreieck, dessen Seiten sich wie $r_1^{-2} : r_2^{-2} : r_3^{-2}$ verhalten, so gibt es 8 (im Grenzfall vier) Ebenen, welche die drei Kreise berühren, andernfalls keine. Man zeige dies und beschreibe die Konstruktion der fraglichen Ebenen im möglichen Fall.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 875. $p_1(n) < p_2(n) < \cdots < p_k(n)$ seien die Primfaktoren von n und es werde

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(n)/p_{i+1}(n)$$

gesetzt (für $k=1$ sei $f(n)=0$). Man zeige die Existenz einer Konstante C, so dass

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = (C + o(1))\, x.$$

K. Alladi und P. Erdös

Literaturüberschau

A. Fetzer und H. Fränkel: Mathematik; Lehrbuch für Fachhochschulen. Band 1: 393 Seiten, 286 Abbildungen, 306 Aufgaben mit Lösungen, DM 41.80; Band 2: 376 Seiten, 203 Abbildungen, DM 41.80; Band 3: 423 Seiten, DM 44.80. Schroedel, Hannover, Dortmund, Darmstadt, Berlin 1977/78.
Das dreibändige Werk richtet sich an Studenten und Dozenten der technischen Richtungen an Fachhochschulen. Der erste Teil bringt vor allem Grundlagen: Mengen, reelle und komplexe Zahlen - Lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten - Vektoren - Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit. Der zweite Teil entwickelt die Differential- und Integralrechnung und führt bis zu ihren Anwendungen in Geometrie, Physik und Technik und zu den einschlägigen («klassischen») numerischen Verfahren. Der dritte Teil schliesslich führt in die Reihenlehre, in die Funktionen mehrerer Variablen, in die komplexwertigen Funktionen und in die gewöhnlichen Differentialgleichungen ein.
Jeder Abschnitt wird durch zahlreiche Aufgaben abgeschlossen, deren Lösungen im Anhang kurz dargestellt sind. - Einige Besonderheiten dieses sehr ansprechenden Werkes: Ausführliche, weitgehend exakte, aber womöglich im Anschaulichen motivierte Darstellung; zahlreiche Beispiele, vor allem auch aus Physik und Technik; einlässliche Behandlung von Gebieten, deren Kenntnis dem Ingenieur in der Fachausbildung sehr nützlich ist (z.B. Ortskurven in der Wechselstromtechnik oder Laplace-Transformation); Beweise überall da, wo mit einigermassen erträglichem Aufwand möglich. - Wer Vorlesungen für Ingenieure auf Fachhochschulniveau vorzubereiten hat, wird sehr gerne zu diesem Buch greifen: Er findet die mathematischen Grundlagen und zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten zuverlässig und vereinigt dargestellt. Dem angehenden Ingenieur wäre vielleicht an machen Stellen noch mehr gedient, wenn man im Anschluss an die saubere, aber im Anschaulichen fussende Formulierung auf «ε und δ» verzichtet hätte: Diese und ähnliche Hilfsmittel sind ja in der Tat sehr wichtig, wenn mit gewissen Begriffen intensiv gearbeitet werden muss; zum Erfassen und Verständlichmachen eines Begriffes tragen sie oft wenig bei. R. Ineichen

Control Theory in Mathematical Economics. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Band 47. Hrsg. P.-T. Liu und J.G. Sutinen. VIII und 241 Seiten, Fr.60.-. Dekker, New York, Basel 1979.
In den letzten Jahren hat sich die mathematische Theorie der Kontrolle dynamischer Systeme als nützliches Instrument zur Lösung vieler sozioökonomischer Probleme erwiesen. Der vorliegende Band fasst jene Artikel zusammen, die 1978 an der dritten Kingston-Konferenz über Differentialspiele und Kontrolltheorie an der Universität Rhode Island vorgelegt wurden. Die Arbeiten vermitteln vor allem neue Ansätze in theoretischer und praktischer Richtung und berücksichtigen die verschiedensten Anwendungsbereiche der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. H. Loeffel