Zur Existenz von pythagoreischen Quadern mit vorgegebener Raumdiagonale

Autor(en): **Fraedrich, Anna Maria**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 2

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-36390

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REFERENCES

1 K.P. Hadeler: Mathematik für Biologen. Springer, 1974.
2 R. Ineichen and E. Batschelet: Genetic selection and de Finetti diagrams. J. Math. Biol. *2*, 33–39 (1975).
3 S. Karlin: Theoretical aspects of multi-locus selection balance I. Ed. S.A. Levin. MAA Studies in Math. *16*, 503–587 (1978).
4 H. Länger and W. Timischl: The evolution of a population for a certain viability system. ZAMP *31*, 538–541 (1980).
5 T. Nagylaki: Selection in one- and two-locus systems. Lect. Notes in Biomath., vol. 15. Springer, 1977.
6 W. Nöbauer and W. Timischl: Mathematische Modelle in der Biologie. Vieweg, 1979.
7 J. Rosner and W. Timischl: Über ein Differenzengleichungssystem der Populationsgenetik. Öst. Akad. Wiss. Sitz.-Ber. Math.-naturw. Kl. II *188*, 247–254 (1979).

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/020052-03$1.50+0.20/0

Elementarmathematik und Didaktik

Zur Existenz von pythagoreischen Quadern mit vorgegebener Raumdiagonale

1. Pythagoreische Rechtecke und pythagoreische Quader

Ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenmasszahlen a, b und c bezeichnet man bekanntlich als pythagoreisches Dreieck. Zwei kongruente pythagoreische Dreiecke lassen sich dann zu einem pythagoreischen Rechteck zusammensetzen, bei welchem Seiten und Diagonale ganzzahlige Längenmasszahlen besitzen.
In Analogie dazu sprechen wir hier von einem pythagoreischen Quader, falls alle Kanten und die Raumdiagonale ganzzahlige Längenmasszahlen besitzen. Sind a, b, c die Kantenmasszahlen und ist d die Längenmasszahl der Diagonale, so muss also $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ mit $a, b, c \in \mathbf{N}$ gelten, wobei hier $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Es sei angemerkt, dass $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ nicht verlangt wird, wie dies bei der Untersuchung der sog. primitiven pythagoreischen Dreiecke erforderlich ist.

2. Beweis des Satzes von Hurwitz über pythagoreische Quader mit vorgegebener Raumdiagonale

Die Frage nach der Existenz von pythagoreischen Quadern mit vorgegebener Raumdiagonale $d \in \mathbf{N}$ ist gleichwertig zu der Frage, für welche $d \in \mathbf{N}$ die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ in $\mathbf{N}$ mindestens eine Lösung besitzt. Die Antwort gibt der folgende

Satz von Hurwitz. *Die Zahlen* 2^k *und* $5 \cdot 2^k$ *mit* $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *sind die einzigen natürlichen Zahlen, die nicht als Längenmasszahl der Raumdiagonale eines pythagoreischen Quaders in Frage kommen.* (Vgl. [1], S. 271[1]), und [2], S. 101.)

Wir zeigen: Zu $d \neq 2^k \cdot 5^l$ mit $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und $l \in \{0, 1\}$ gibt es mindestens eine Lösung von $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ in $\mathbf{N}$.

1) Für diesen Literaturhinweis bin ich Herrn E. Trost zu Dank verpflichtet.

Der Beweis wird in vier Schritten geführt:

1. Schritt. Wir zeigen, dass wir uns bei der Lösbarkeit von $a^2+b^2+c^2=d^2$ auf ungerades d beschränken können.
Wäre nämlich d gerade, also $d=2d_1$, so wäre d^2 durch 4 teilbar. Dies ergibt wegen $a^2+b^2+c^2=d^2$ mit $a,b,c\in\mathbf{N}$, dass sowohl a als auch b als auch c gerade sein müssten: $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$. Damit ist $a^2+b^2+c^2=d^2$ äquivalent zu $a_1^2+b_1^2+c_1^2=d_1^2$. Falls auch d_1 gerade ist, kann man entsprechend ein zweites Mal reduzieren. So fährt man fort, bis man zu d_k mit $2\nmid d_k$ gekommen ist. Falls die Gleichung $d_k^2=a_k^2+b_k^2+c_k^2$ in $\mathbf{N}$ lösbar ist, ist dann auch $d^2=a^2+b^2+c^2$ in $\mathbf{N}$ lösbar: $a=2^k\cdot a_k$, $b=2^k\cdot b_k$, $c=2^k\cdot c_k$. (Anm.: Es sei noch einmal daran erinnert, dass $\mathrm{ggT}(a,b,c)=1$ hier nicht verlangt wird.)

2. Schritt. Wir zeigen, dass die Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ für $d=2^k\cdot 5^l$ mit $k\in\{0,1,2,3,\ldots\}$ und $l\in\{0,1\}$ keine Lösung besitzt, wohl aber für $d=2^k\cdot 5^l$ mit $k\geqslant 0$ und $l\geqslant 2$.
Wir nehmen an, $a^2+b^2+c^2=d^2$ besitze für $d=2^k\cdot 5^l$ mit $k\geqslant 0$ und $l\leqslant 1$ eine Lösung mit $a,b,c\in\mathbf{N}$. Nach dem eben beschriebenen Reduktionsverfahren erhält man die Gleichung $(2^k\cdot a_k)^2+(2^k\cdot b_k)^2+(2^k\cdot c_k)^2=(2^k\cdot 5^l)^2$ mit $a_k,b_k,c_k\in\mathbf{N}$. Hieraus folgt $a_k^2+b_k^2+c_k^2=5^{2l}$. Diese Gleichung ist aber weder für $l=0$ noch für $l=1$ in $\mathbf{N}$ lösbar. Also kann auch die ursprüngliche Gleichung nicht in $\mathbf{N}$ lösbar sein im Widerspruch zu unserer Annahme.
Für $d=5^2$ besitzt die Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ in $\mathbf{N}$ jedoch eine Lösung: beispielsweise leisten $a=20$, $b=12$ und $c=9$ das Verlangte. Hieraus folgt aber unmittelbar, dass die Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ für $d=2^k\cdot 5^l$ mit $k\geqslant 0$ und $l\geqslant 2$ stets mindestens eine Lösung besitzt (wobei wiederum $\mathrm{ggT}(a,b,c)\neq 1$ vorkommen darf).

3. Schritt. Wir zeigen, dass wir uns bei der Lösbarkeit von $a^2+b^2+c^2=d^2$ auf ungerade Primzahlen d beschränken können.
Sei $d\in\mathbf{N}$ beliebig ungerade und t ein Teiler von d, für welchen die Gleichung $a_t^2+b_t^2+c_t^2=t^2$ in $\mathbf{N}$ eine Lösung besitzt. Dann sind offensichtlich

$$a=\frac{d}{t}\cdot a_t,\qquad b=\frac{d}{t}\cdot b_t,\qquad c=\frac{d}{t}\cdot c_t\in\mathbf{N}$$

Lösungen von $a^2+b^2+c^2=d^2$.

4. Schritt. Wir zeigen, dass die Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$ für jede ungerade Primzahl $d\neq 5$ mindestens eine Lösung in $\mathbf{N}$ besitzt.
Zum Beweis machen wir eine Fallunterscheidung nach der Anzahl der Quadrate aus $\mathbf{N}$, in welche d zerlegt werden kann.

1. Fall: $d=m^2+n^2$ mit $m,n\in\mathbf{N}$ und $m>n$. Dann bilden m^2-n^2, $2mn$ und $d=m^2+n^2$ ein primitives pythagoreisches Tripel: $d^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$. Wegen $5\nmid d$ ist entweder $d^2\equiv 1 \pmod 5$ oder $d^2\equiv 4 \pmod 5$. Wäre sowohl $5\nmid m^2-n^2$ als auch $5\nmid 2mn$, so liesse $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ bei Division durch 5 entweder keinen Rest oder den Rest 2 oder den Rest 3. Da dies nicht möglich ist, muss also wegen $5\nmid d$ entweder

$5 \mid m^2-n^2$ oder $5 \mid 2mn$ sein. Hiermit folgt aber aus $d^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ und $5^2=3^2+4^2$ die Darstellbarkeit von d^2 als Summe von drei Quadraten aus $\mathbf{N}$ und damit die Behauptung.

2. Fall: $d=l^2+m^2+n^2$ mit $l,m,n \in \mathbf{N}$, aber $d \neq x^2+y^2$ für alle $x,y \in \mathbf{N}$.
Jetzt ergibt sich die Behauptung aus der nachstehenden Identität: $d^2=(l^2+m^2-n^2)^2+(2ln)^2+(2mn)^2$, wobei $l^2+m^2-n^2 \neq 0$, da sonst $d=2 \cdot n^2$ wäre im Widerspruch zu $d \equiv 1 \pmod 2$.

3. Fall: $d=k^2+l^2+m^2+n^2$ mit $k,l,m,n \in \mathbf{N}$, aber $d \neq x^2+y^2$ für alle $x,y \in \mathbf{N}$.
In diesem Fall folgt die Behauptung aus der Identität $d^2=(k^2-l^2-m^2+n^2)^2+(2kl-2mn)^2+(2km+2ln)^2$. (Anm.: Auf diese Identität stiess die Verfasserin bei der Lektüre von [3], S. 69, und [4], S. 106.)
Zunächst ist $k^2-l^2-m^2+n^2 \neq 0$, da sonst $d=2(k^2+n^2)$ wäre, was bei ungeradem d nicht möglich ist. Aus $2kl-2mn=0$ folgte aber die Darstellbarkeit von d^2 als Summe von zwei Quadraten: $d^2=v^2+w^2$ mit $v,w \in \mathbf{N}$. Da d Primzahl ist, wäre (v,w,d) somit ein primitives pythagoreisches Tripel, weshalb auch d selbst als Summe von zwei Quadraten aus $\mathbf{N}$ darstellbar wäre im Widerspruch zur Voraussetzung über d.

Weil sich nach dem Satz von Lagrange aber jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten aus $\mathbf{N}$ darstellen lässt, ist der Beweis hiermit beendet.

Anna Maria Fraedrich, PH Ludwigsburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 L.E. Dickson: History of the Theory of Numbers, Chelsea reprint, New York, 1966, Bad. 2. (Siehe auch: Hurwitz, Mathematische Werke II, S. 751.)
2 W. Sierpinski: Pythagorean Triangles. New York 1962.
3 W. Sierpinski: Elementary Theory of Numbers. New York 1964.
4 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$. El. Math. *1956*, 105–108.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/020054-03$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 856 A. Es sei $M=\{P_1,\ldots,P_n\}$ eine Menge von n Punkten in einer Ebene. Bezeichnet $d(P_i,P_j)$ die euklidische Distanz von P_i,P_j, so gelte

$$d(P_i,P_j) \neq d(P_k,P_l) \Rightarrow |d(P_i,P_j)-d(P_k,P_l)| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Dann lässt sich für den Durchmesser $\delta(M):=\max\{d(P_i,P_j);\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ die Abschätzung

$$\delta(M) > C_\varepsilon n^{2/3} \tag{2}$$

gewinnen. Lässt sich (2) verschärfen?

P. Erdös