Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 860. $P(n)$ bzw. $p(n)$ bezeichne den grössten bzw. den kleinsten Primteiler von n. Man zeige:

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{P(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}\left(1+o(1)\right)\frac{x}{\log x}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{p(n)}{n} = \pi(x) + O\left(\frac{x^{0,5}}{\log x}\right). \tag{2}$$

P. Erdös

Lösung:
(i) Wir betrachten zuerst die Zahlen n für die $P(n)=q>x^{0,5}$. Ihr Beitrag zu $S_1 := \sum_{n\le x} n^{-1}P(n)$ ist

$$\sum_{x^{0,5}<q\le x}\ \sum_{m\le x/q} \frac{1}{m} = \sum_{m\le x^{0,5}} \frac{1}{m}\left\{\pi\left(\frac{x}{m}\right) - \pi(x^{0,5})\right\}$$

$$= \frac{x}{\log x}\sum_{m\le x^{0,5}} \frac{1}{m^2}\left(1+o(1)\right) + O(x^{0,5}),$$

nach dem Primzahlsatz. Die Zahlen n mit $q\le x^{0,5}$ tragen zu S_1 höchstens

$$\sum_{q\le x^{0,5}}\ \sum_{m\le x/q} \frac{1}{m} \le \pi(x^{0,5})\log x = O(x^{0,5})$$

bei. Das Ergebnis folgt jetzt aus $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} = \pi^2/6$.
(ii) In diesem Teil verwenden wir die bekannte Formel (siehe z. B. [1], S. 90)

$$\sum_{p\le x} p^{-1} = \log\log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right), \qquad (x\to\infty). \tag{*}$$

Es sei $B := (\log x)^2$. Wir betrachten die Zahlen n für die $p(n)=p<x^{0,5}/B$ gilt. Ihr Beitrag zu $S_2 := \sum_{n\le x} p(n)/n$ ist höchstens

$$\sum_{p<x^{0,5}/B}\ \sum_{m\le x/p} \frac{1}{m} \le \pi(x^{0,5}/B)\log x = o(x^{0,5}/\log x).$$

Die Primzahlen tragen $\pi(x)$ bei zu S_1. Für die übrigen n gilt $p(n)=p>x^{0,5}/B$, also haben diese n genau zwei (nicht notwendig verschiedene) Primfaktoren. Der Beitrag dieser n zu S_2 ist nach (*):

$$\sum_{x^{0,5}/B<p\le x^{0,5}} \sum_{p\le q\le x/p} \frac{1}{q} \le \sum_{x^{0,5}/B<p\le x^{0,5}} \sum_{x^{0,5}/B\le q\le x^{0,5}B} \frac{1}{q}$$

$$\le \pi(x^{0,5}) \cdot \left\{\log\log(x^{0,5}B) - \log\log(x^{0,5}/B) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}$$

$$= \pi(x^{0,5})\, O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right) = o\left(\frac{x^{0,5}}{\log x}\right).$$

D. h. dass (2) sogar mit o gilt.

J. H. van Lint, Eindhoven, NL

LITERATURVERZEICHNIS

1 T. M. Apostol: Introduction to Analytic Number Theory. Springer, 1976.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD) und E. Trost (Zürich).

Aufgabe 861. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ mit $\alpha + n\beta \neq (2k+1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, 3$, $k \in \mathbf{Z}$, zeige man die Gültigkeit der Identität

$$[\tan(\alpha+3\beta) - \tan\alpha][\tan(\alpha+2\beta) - \tan(\alpha+\beta)]$$
$$= (4\cos^2\beta - 1)[\tan(\alpha+3\beta) - \tan(\alpha+2\beta)][\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha].$$

H. Schilt, Biel

1. Lösung: Multiplikation mit $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+3\beta)$ führt auf $\sin(3\beta)\sin\beta = (4\cos^2\beta - 1)\sin^2\beta$, eine gültige Identität wegen $\sin(3\beta) = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$. Wegen der Nebenbedingungen ist der Schluss umkehrbar.

J. Binz, Bolligen

2. Lösung des Aufgabenstellers: Formt man die Behauptung um in

$$\frac{\tan(3\beta+\alpha) - \tan\alpha}{\tan(3\beta+\alpha) - \tan(2\beta+\alpha)} : \frac{\tan(\beta+\alpha) - \tan\alpha}{\tan(\beta+\alpha) - \tan(2\beta+\alpha)} = 1 - 4\cos^2\beta,$$

so sieht man, dass die linke Seite als Doppelverhältnis für ein homogenes Geradenbüschel aufgefasst werden kann, wobei benachbarte Geraden je den Winkel β einschliessen. Das Doppelverhältnis ist invariant gegenüber Drehungen, α kann daher beliebig gewählt werden. Setzt man z. B. $\alpha = -\beta$, so ergibt sich die Behauptung.

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, DK), P. Bundschuh (Köln, BRD), E. C. Buissant des Amorie (Amstelveen, NL), H. Egli (Zürich), L. Filep und A. Varecza (Nyiregyhàza, Ungarn), J. T. Groenman (Groningen, NL), L. Kuipers (Mollens VS), P. Hajnal (Szeged, Ungarn), P. Hohler (Olten), W. Janous (Innsbruck, A), A. Makowski (Warszawa, Polen), V. D. Mascioni (Origlio), H. J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil), P. Zimmermann (Glarus).

Aufgabe 862. Let P be a point in the interior of a triangle with vertices A_i and vertex angles a_i, and set $\beta_i = \angle PA_iA_{i+1}$ ($i=1,2,3$, with $A_4 \equiv A_1$). Abi-Khuzam [1] asked recently in this Journal whether it is necessarily the case that

$$\prod \beta_i \leq \prod (a_i/2). \tag{1}$$

concerning which it is well-known that

$$\prod \sin \beta_i = \prod \sin (a_i - \beta_i) \leq \prod \sin (a_i/2), \tag{2}$$

and for which Abi-Khuzam showed that the Brocard angle ω, determined by P being such that $\beta_i = \omega$ ($i=1,2,3$) and given by

$$\cot \omega = \sum \cot a_i, \tag{3}$$

satisfies the inequality

$$\omega^3 \leq \prod (a_i - \omega). \tag{4}$$

Show that (1) does not always hold.

D. J. Daley, Canberra, Australia

Lösung des Aufgabenstellers: To show that (1) need not always hold, it is enough to prove that with fixed $\beta_1 = a_1/2$, the pair $(\beta_2, \beta_3) = (a_2/2, a_3/2)$ need not be a stationary point of $\beta_1\beta_2\beta_3$. For clarity, write $\beta_2 = \beta, \beta_3 = \gamma$, and consider

$$f(\beta) \equiv \beta_1 \beta \gamma,$$

γ being defined implicitly by

$$\sin \beta_1 \sin \beta \sin \gamma = \sin (a_1 - \beta_1) \sin (a_2 - \beta) \sin (a_3 - \gamma),$$

so that

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\sin \beta_1 \cos \beta \sin \gamma + \sin (a_1 - \beta_1) \cos (a_2 - \beta) \sin (a_3 - \gamma)}{\sin \beta_1 \sin \beta \cos \gamma + \sin (a_1 - \beta_1) \sin (a_2 - \beta) \cos (a_3 - \gamma)}. \tag{5}$$

Now $f'(\beta) = 0$ when $d\gamma/d\beta = -\gamma/\beta$, and for $\beta_i = a_i/2$, (5) yields

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\tan (a_3/2)}{\tan (a_2/2)}, \qquad \neq -\frac{a_3}{a_2} \quad \text{unless} \quad a_3 = a_2.$$

Our assertion is proved.

Einen weiteren Beitrag sandte L. Kuipers (Mollens VS).

LITERATURVERZEICHNIS

1 El. Math. *4*, 80–81 (1980).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1982* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 879. Welche Beziehung besteht zwischen dem Abstand und dem Winkel irgend zweier windschiefer Erzeugenden eines einschaligen Drehhyperboloids?

W. Wunderlich, Wien, A

Aufgabe 880. Durch je drei von n Punkten des Raumes ($n \geq 3$) denke man sich eine Ebene gelegt. Man zeige, dass diese Ebenen den Raum in maximal

$$\frac{1}{1296}(n^9 - 9n^8 - 48n^7 + 1098n^6 - 6711n^5 + 20079n^4 - 29890n^3 + 17712n^2 - 936n + 1296)$$

Gebiete zerlegen. [Aufgabe 643, El. Math. 26, 46 (1971), beinhaltet das analoge Problem für die Ebene.]

K. Wirth und A. S. Dreiding, Zürich

Aufgabe 881. Zu drei gegebenen Kreisen, die in drei verschiedenen nicht demselben Büschel angehörenden Ebenen und nicht auf derselben Kugel liegen, gibt es im allgemeinen (Ausnahmen!) genau eine Ebene, welche diese Kreise in sechs Punkten eines Kreises schneidet (imaginäre Schnittpunkte mitgerechnet). Dies ist zu zeigen.

C. Bindschedler, Küsnacht

Literaturüberschau

P. R. Thie: An Introduction to Linear Programming and Game Theory. XIII und 335 Seiten, US-$20.00. John Wiley & Sons, New York 1979.
Die einführende Darstellung vermittelt fundamentale theoretische Konzepte und Berechnungsmethoden der linearen Optimierung und Spieltheorie. Neben klassischen Gegenständen findet man auch ein Kapitel über ganzzahlige Optimierung und Sensitivitätsanalyse. Die Spieltheorie wird direkt in Normalform eröffnet und beschränkt sich auf Zwei-Personen-Spiele. Das mathematisch einwandfrei aufgebaute und doch leicht lesbare Lehrbuch richtet sich vor allem an Studenten der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.

H. Loeffel