Über den Zwischenwertsatz von Darboux und den Umkehrsatz für differenzierbare Funktion mehrerer Veränderlicher

Autor(en): **Steffen, Klaus**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-36397

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 37 Nr. 5 Seiten 121-152 Basel, den 10. September 1982

Über den Zwischenwertsatz von Darboux und den Umkehrsatz für differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Bekanntlich besitzt die Ableitung f' einer überall differenzierbaren reellwertigen Funktion f einer reellen Veränderlichen die Zwischenwerteigenschaft, das heisst f' nimmt auf jedem im Definitionsbereich von f enthaltenen Intervall $[a,b]$ alle Werte zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an. Das Bemerkenswerte an diesem Satz, der zuerst von Darboux ausgesprochen wurde [4], ist die Tatsache, dass Stetigkeit der Ableitung f' nicht vorausgesetzt werden muss.
Der Darbouxsche Zwischenwertsatz für die Ableitung ist äquivalent mit folgender Version des Umkehrsatzes: Ist f eine reellwertige, auf dem Intervall $(a,b)\subset\mathbf{R}$ überall differenzierbare Funktion mit $f'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, so ist f entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend und f besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion. In der Tat, aus der Zwischenwerteigenschaft der Ableitung ergibt sich sofort, dass f' überall negativ oder überall positiv ist auf (a,b), woraus mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die strenge Monotonie von f gefolgert werden kann; somit besitzt f eine stetige Umkehrfunktion f^{-1}, und die Differenzierbarkeit von f^{-1} zeigt man wie üblich durch Betrachtung von Differenzenquotienten. Umgekehrt folgt aus dem gerade formulierten Umkehrsatz leicht, dass die Ableitung f' einer überall differenzierbaren Funktion $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ eine Nullstelle in (a,b) haben muss, wenn f' Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, und diese Aussage ist gleichwertig mit dem Zwischenwertsatz für die Ableitung von überall differenzierbaren Funktionen einer Variablen.
In dieser Note sollen höherdimensionale Analoga der beiden oben angesprochenen Sätze behandelt werden. Im Falle des Umkehrsatzes wird an die Stelle der Nullstellenfreiheit der Ableitung bei Funktionen von einer Veränderlichen nun die Voraussetzung treten, dass die (totale) Ableitung der betrachteten Funktion f an jeder Stelle ein linearer Automorphismus des zugrundeliegenden Raumes $\mathbf{R}^n$ ist. Die Umkehrbarkeit von f kann man allerdings, wie auch bei stetig differenzierbaren Funktionen, nur noch lokal erwarten: Tatsächlich werden wir beweisen:

Satz I. *Sei D offen in $\mathbf{R}^n$ und $f:D\to\mathbf{R}^n$ überall auf D total differenzierbar. Ist die (möglicherweise unstetige) Ableitung f' an jeder Stelle $x\in D$ eine invertierbare lineare Selbstabbildung von $\mathbf{R}^n$, so ist f ein lokaler Homöomorphismus, und die lokalen Umkehrabbildungen g sind total differenzierbar mit $g'(f(y))=f'(y)^{-1}$ für $y\in$ Bild g.*

Obwohl dieser Satz weitgehend den üblichen Formulierungen des Umkehrsatzes entspricht, sind doch die bekannten Beweise wegen der möglichen Unstetigkeit der Ableitung f' nicht übertragbar. Zum Beweis von Satz I benötigen wir topologische Hilfsmittel, insbesondere die Theorie des (lokalen) Abbildungsgrades und den Baireschen Kategoriensatz. Im Verlaufe des Beweises wird sich auch die Äquivalenz von Satz I mit folgendem Satz ergeben, der als Analogon des Zwischenwertsatzes von Darboux für Funktionen von mehreren Veränderlichen angesehen werden kann:

Satz II. *Sei D offen und zusammenhängend in $\mathbf{R}^n$ und sei $f: D \to \mathbf{R}^n$ überall auf D total differenzierbar. Nimmt die (möglicherweise unstetige) Jacobi-Determinante $\det \circ f'$ von f positive und negative Werte auf D an, so hat sie auch eine Nullstelle in D.*

Dem Beweis der Sätze I und II schicken wir einige Hilfssätze voraus, die teilweise auch für sich von Interesse sind. Der Vollständigkeit halber und um den Sonderfall $n=1$ im folgenden ausschliessen zu können, geben wir an dieser Stelle noch einen Beweis des Darbouxschen Zwischenwertsatzes an, zu dem ja Sätze I und II im Falle $n=1$ äquivalent sind: Wenn f auf $[a,b]$ differenzierbar ist und etwa $f'(a)<z<f'(b)$, so kann man Differenzenquotienten $h^{-1}[f(a+h)-f(a)]$ und $h^{-1}[f(b)-f(b-h)]$ finden mit $a<a+h<b-h<b$ und $h^{-1}[f(a+h)-f(a)]<z<h^{-1}[f(b)-f(b-h)]$; eine Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die stetige Funktion $[a,b-h] \ni x \mapsto h^{-1}[f(x+h)-f(x)]$ liefert sodann ein $c \in (a,b-h)$ mit $z=h^{-1}[f(c+h)-f(c)]$, und aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ergibt sich schliesslich die Existenz eines $d \in (c,c+h) \subset (a,b)$ mit $f'(d)=h^{-1}[f(c+h)-f(c)]=z$.

2. Im folgenden bezeichne stets D eine offene Menge in $\mathbf{R}^n$. Die Räume $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ werden mit dem euklidischen Skalarprodukt und der zugehörigen Norm $|\cdot|$ ausgestattet. Wir ziehen zunächst eine einfache Folgerung aus der Injektivität des Differentials einer Funktion $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^m$. Wir nennen f *semi-injektiv* bei $x \in D$, wenn es eine Umgebung $U \subset D$ von x gibt, in der ausser x kein weiteres Urbild von $f(x)$ liegt, d. h. $f^{-1}\{f(x)\} \cap U = \{x\}$. Dann gilt:

Proposition 1. *Ist $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^m$ differenzierbar an der Stelle $x \in D$ mit injektivem Differential $f'(x): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, so ist f semi-injektiv bei x.*

Beweis: Wir setzen $\gamma := \inf\{|f'(x)u| : u \in \mathbf{R}^n, |u|=1\}$ und bemerken, dass $\gamma > 0$ ist wegen der Injektivität von $f'(x)$. Es folgt für $y \in D - \{x\}$

$$\frac{1}{|y-x|}\,|f(y)-f(x)| \geq \left|f'(x)\frac{y-x}{|y-x|}\right| - \frac{1}{|y-x|}\,|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|$$

$$\geq \gamma - \frac{1}{|y-x|}\,|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|\,.$$

Der letzte Ausdruck ist positiv für $0<|y-x|$ hinreichend klein, weil der Subtrahend bei $y\to x$ gegen Null strebt nach Definition der (totalen) Differenzierbarkeit von f an der Stelle x. Somit gilt $|f(y)-f(x)|>0$ für y hinreichend nahe bei x mit $y\neq x$, und Proposition 1 ist bewiesen. □

Bekannte Beispiele zeigen, dass aus den Voraussetzungen von Proposition 1 nicht schon die lokale Injektivität von f bei x geschlossen werden kann. Man betrachte etwa $n=1$, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mit $f(0):=0$ und $f(y):=y+2y^2\sin 1/y$ für $y\neq 0$; dann ist $f'(0)=1$, aber f' hat in jeder Nullumgebung sowohl positive als auch negative Werte, also ist f auf keiner Nullumgebung monoton. Derartige Phänomene können allerdings nur an Unstetigkeitsstellen der Ableitung auftreten.

Ist nämlich f auf einer Umgebung U von $x\in D$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ injektiv, so gibt es eine Kugel B um x in U mit $|[f'(y)-f'(x)]u|<\gamma/2$ für alle $y\in B$ und $u\in\mathbf{R}^n$ mit $|u|=1$, und es folgt für $y,z\in B$ die Ungleichung

$$|f(y)-f(z)|=\left|\int_0^1 f'(ty+(1-t)z)\,(y-z)\,dt\right|\geq\left|\int_0^1 f'(x)\,(y-z)\,dt\right|$$
$$-\left|\int_0^1 [f'(ty+(1-t)z)-f'(x)]\,(y-z)\,dt\right|\geq\gamma|y-z|-\int_0^1\frac{\gamma}{2}\,|y-z|\,dt=$$
$$=\frac{\gamma}{2}\,|y-z|\,,$$

woraus man die Injektivität von f auf B abliest. Auch wenn nur die Stetigkeit von f' an der einen Stelle x vorausgesetzt wird, kann man noch lokale Injektivität von f bei x beweisen. Hierzu definiert man B wie zuvor und wendet für $y,z\in B$ auf die reellwertige differenzierbare Funktion $t\to f(ty+(1-t)z)\cdot[f'(x)(y-z)]$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, um für ein $\tau\in(0,1)$ zu erhalten

$$[f(y)-f(z)]\cdot[f'(x)\,(y-z)]=[f'(\tau y+(1-\tau)z)\,(y-z)]\cdot[f'(x)\,(y-z)]$$
$$\geq|f'(x)\,(y-z)|^2-\frac{\gamma}{2}\,|y-z|\cdot|f'(x)\,(y-z)|\geq\frac{\gamma}{2}\,|y-z|\cdot|f'(x)\,(y-z)|\,,$$

woraus mit der Schwarzschen Ungleichung wieder $|f(y)-f(z)|\geq\frac{\gamma}{2}\,|y-z|$ folgt.

Um Satz I zu beweisen, müssen wir die Frage der lokalen Injektivität von f bei x untersuchen, wenn die Voraussetzung der Stetigkeit und Injektivität von f' an der Stelle x ersetzt wird durch die schwächere Annahme, dass $f'(y)$ existiert und injektiv ist für alle y aus einer Umgebung U von x in D. In diesem Falle gibt es zwar gemäss Proposition 1 um jedes $y\in U$ eine Kugel B_y mit $B_y\cap f^{-1}\{f(y)\}=\{y\}$, aber es ist nicht klar, dass die Radien dieser Kugeln B_y durch eine von $y\in U$ unabhängige positive Konstante nach unten abgeschätzt werden können. (Die Existenz einer solchen positiven unteren Schranke zu hinreichend kleinen Umgebungen U von x ist äquivalent zur lokalen Injektivität von f bei x, wie man leicht sieht.) Bei Abbildungen zwischen euklidischen Räumen gleicher Dimension

werden wir dieses Problem in den folgenden Abschnitten mit topologischen Hilfsmitteln erledigen können. Bei Abbildungen zwischen Räumen verschiedener Dimension jedoch folgt aus der Injektivität der Ableitung $f'(y)$ für alle y nicht notwendig die lokale Injektivität der zugrundeliegenden Abbildung f. Dies zeigt im einfachsten Fall $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ das folgende Beispiel, aus dem man leicht auch entsprechende Beispiele von Abbildungen $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ für beliebige n und $m > n$ konstruieren kann.

Beispiel: Wir definieren $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ durch $f(x) := (x, 0)$ für $x \geq 0$ und

$$f(x) := \left(\frac{x}{1 + \frac{\pi x}{2} \sin \frac{1}{x}}, \quad e^{\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \right) \quad \text{für} \quad x < 0.$$

Dann ist f unendlich oft differenzierbar auf $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ und auch einmal differenzierbar im Nullpunkt mit $f'(0) = (1, 0)$ (aber f' ist nicht stetig im Nullpunkt). Die Abbildung $f_{|(-\infty, 0)}$ entsteht aus der Trochoide (verallgemeinerte Zykloide)

$$g(t) := \left(t + \frac{\pi}{2} \sin t, \frac{\pi}{2} \cos t \right), \qquad t > 0,$$

durch Anwendung des Diffeomorphismus

$$\Phi(\xi, \eta) := \left(\xi, \frac{2}{\pi} e^{-\xi} \eta \right)$$

von $(0, \infty) \times \mathbf{R}$ auf sich, gefolgt von dem Diffeomorphismus

$$\Psi(\xi, \zeta) := \left(-\frac{1}{\xi}, \zeta \right)$$

von $(0, \infty) \times \mathbf{R}$ auf $(-\infty, 0) \times \mathbf{R}$ und durch eine Transformation der unabhängigen Variablen:

$$f(x) = \Psi \circ \Phi \circ g\left(-\frac{1}{x} \right).$$

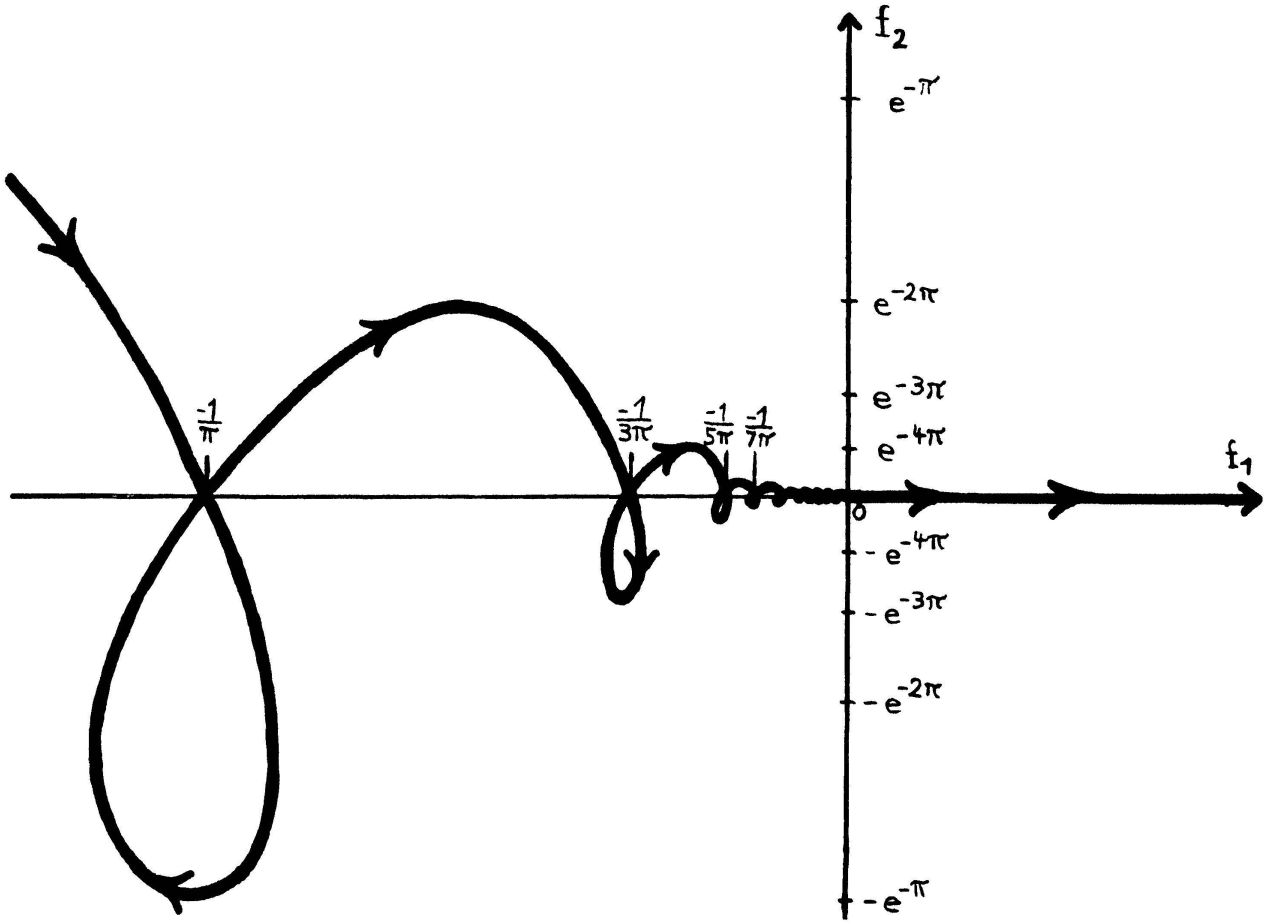
Hieraus erkennt man wegen $g'(t) \neq (0, 0)$ für alle t, dass $f'(x)$ injektiv ist (d.h. $f'(x) \neq (0, 0)$ im vorliegenden Falle) für alle $x < 0$, und aus der Definition von $f(x)$ für $x > 0$ sowie der Berechnung von $f'(0)$ ergibt sich dasselbe für $x \geq 0$. Andererseits hat die Trochoide g abzählbar viele Doppelpunkte, nämlich

$$g\left(\frac{4k\pi + \pi}{2} \right) = g\left(\frac{4k\pi + 3\pi}{2} \right)$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$, und hieraus folgt, dass f im Nullpunkt eine Häufungsstelle von Doppelpunkten besitzt,

$$f\left(\frac{-2}{4k\pi+\pi}\right)=f\left(\frac{-2}{4k\pi+3\pi}\right).$$

Somit ist f auf keiner Umgebung des Nullpunkts injektiv. Die folgende Abbildung zeigt das Bild von f, die Pfeile deuten die Parametrisierung des Bildes an (der Maßstab auf der f_2-Achse wurde nichtlinear verzerrt):



3. Wir wenden uns nun der Frage der lokalen Surjektivität einer differenzierbaren Abbildung f zu, wobei wir zunächst eine Abbildung $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ zwischen Räumen gleicher Dimension ins Auge fassen. Ist f stetig und $f'(x)$ an der Stelle $x \in D$ definiert und surjektiv, also ein linearer Automorphismus von $\mathbf{R}^n$, so folgt aus Proposition 1, dass $f(x) \notin f(\partial U)$ ist für hinreichend kleine Umgebungen U von x in D. In einer solche Situation ist der *Abbildungsgrad* $\deg(f, U, f(x)) \in \mathbf{Z}$ von $f_{|U}$ bzgl. des Punktes $f(x)$ definiert (siehe [5, 7, 10] für die im folgenden benutzten Eigenschaften des Abbildungsgrades; wir können uns ohne Einschränkung auf die Betrachtung solcher Umgebungen von x beschränken, die kompakten Abschluss in D haben). Dieser Abbildungsgrad kann berechnet werden mit Hilfe der Beobachtung, dass durch

$$H: [0,1] \times U \ni (t,y) \mapsto (1-t)f(y) + tf'(x)(y-x) + tf(x) \in \mathbf{R}^n$$

eine Homotopie von f in die affine Abbildung $U \ni y \mapsto f'(x)(y-x) + f(x)$ vermittelt wird mit der Eigenschaft

$$|H(t,y)-f(x)| \geq |f'(x)(y-x)| - (1-t)|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)| > 0$$

$$\text{für} \quad 0 \leq t \leq 1, \qquad y \in \partial U,$$

vorausgesetzt U wurde klein genug gewählt. Aus der Homotopie-Invarianz des Abbildungsgrades folgt nun, dass der Grad $\deg(f, U, f(x))$ für hinreichend kleine Umgebungen U von x mit dem entsprechenden Grad der affinen Approximation $y \mapsto f'(x)(y-x)+f(x)$ zu f übereinstimmt, und letzterer Grad ist gleich dem Vorzeichen der Determinante von $f'(x)$. Somit ist $\deg(f, U, f(x)) = \pm 1$, also jedenfalls verschieden von Null, für hinreichend kleine U, und gemäss einer fundamentalen Eigenschaft des Abbildungsgrades impliziert dies, dass die Zusammenhangskomponente des Punktes $f(x)$ von $\mathbf{R}^n \backslash f(\partial U)$ ganz im Bild $f(U)$ liegt. Da $\mathbf{R}^n \backslash f(\partial U)$ offen ist (denn aufgrund unserer Annahmen über U ist ∂U kompakt in D, also $f(\partial U)$ kompakt in $\mathbf{R}^n$), schliessen wir, dass die fragliche Zusammenhangskomponente eine Umgebung des Punktes x in $\mathbf{R}^n$ darstellt, die ganz in $f(U)$ enthalten ist, d.h. f ist lokal surjektiv bei x.
Falls $f: \mathbf{R}^m \supset D \to \mathbf{R}^n$, $m > n$, stetig ist und an der Stelle $x \in D$ ein surjektives totales Differential $f'(x)$ besitzt, so schränke man f auf einen n-dimensionalen zu Kern $f'(x)$ transversalen affinen Unterraum A von $\mathbf{R}^m$ durch den Punkt x ein. Die vorangegangenen Überlegungen zeigen dann, dass $f(x)$ innerer Punkt von $f(A \cap U)$ ist für alle (hinreichend kleinen) Umbegungen U von x in D, insbesondere ist also $f(x)$ auch innerer Punkt von $f(U)$. Damit ist bewiesen:

Proposition 2. *Ist $f: \mathbf{R}^m \supset D \to \mathbf{R}^n$ stetig und an der Stelle $x \in D$ differenzierbar mit surjektivem Differential $f'(x)$, so ist f lokal surjektiv bei x, d.h. $f(x)$ ist innerer Punkt von $f(U)$ für alle Umgebungen U von x in D.*

Korollar. *Ist f' an jeder Stelle von D definiert und surjektiv, so ist f eine offene Abbildung, d.h. f führt offene Teilmengen von D in offene Teilmengen von $\mathbf{R}^n$ über.*

Bezüglich des Korollars sehe man auch [2, 3, 12, 13], wo die Offenheit von stetig differenzierbaren Abbildungen (mit möglichen kritischen Stellen) diskutiert wird.

4. Wir nehmen nun an, dass f die Voraussetzungen von Satz I erfüllt, d.h. $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ ist überall auf D differenzierbar und $f'(x)$ ist für alle $x \in D$ eine invertierbare lineare Selbstabbildung von $\mathbf{R}^n$. Aus Proposition 1 folgt dann, dass alle Urbilder $f^{-1}\{y\}$, $y \in \mathbf{R}^n$, diskret in D sind, und aus dem Korollar zu Proposition 2 entnimmt man, dass f eine offene Abbildung ist. Derartige *diskrete, offene Abbildungen* (und die allgemeineren «light open mappings») sind Gegenstand vielfältiger Untersuchungen gewesen [1, 3, 6, 8, 12], und aus den Resultaten von [8] zum Beispiel erhält man unter Verwendung der Tatsache, dass der Abbildungsgrad $\deg(f, U, f(x)) = \pm 1$ ist für alle $x \in D$ und hinreichend kleine Umgebungen U von x in D, unmittelbar die lokale Umkehrbarkeit von f und damit Satz I. In diesen Untersuchungen werden jedoch tiefliegende topologische Hilfsmittel (wie Alexander-Spanier-Kohomologietheorie oder P.-A.-Smith-Theorie periodischer

Punkte) verwendet, die unter den Voraussetzungen von Satz I vermieden werden können, wie wir darlegen werden.
Wir beweisen in diesem Abschnitt drei Hilfssätze, in denen alle Aussagen über diskrete, offene Abbildungen zusammengefasst sind, welche zum Beweis der Sätze I und II benötigt werden. Dazu führen wir zunächst zu einer gegebenen Abbildung $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ die *Anzahlfunktion*

$$N_f(y) := \begin{cases} \infty, \text{ wenn } f^{-1}\{y\} \text{ unendlich ist,} \\ \text{Anzahl der Elemente von } f^{-1}\{y\} \text{ sonst,} \end{cases} \quad \text{für} \quad y \in \mathbf{R}^n$$

ein und stellen einigen ihrer Eigenschaften zusammen in

Lemma 1. *Sei $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ stetig und offen. Dann gilt:*
(i) *N_f ist von unten halbstetig auf $\mathbf{R}^n$;*
(ii) *wenn $N_f \circ f$ in $x \in A \subset D$ ein endliches lokales Maximum relativ zu A besitzt, so existiert eine Umgebung U von x in D derart, dass $f_{|U \cap A}$ injektiv und $f(U \cap A) \cap f(U \setminus A) = \emptyset$ ist.*

Beweis:
(i) Wenn $x_1, \ldots, x_k$ verschiedene f-Urbilder zu $y \in \mathbf{R}^n$ sind, so können wir paarweise disjunkte Umgebungen U_i zu x_i finden für $1 \le i \le k$, und wir setzen $V := \bigcap_{i=1}^k f U_i$. Dann ist V eine Umgebung von y in $\mathbf{R}^n$ (da f offen ist), und jedes $y' \in V$ hat mindestens ein f-Urbild in jedem U_i. Dies zeigt, dass aus $N_f(y) \ge k$ folgt $N_f \ge k$ auf einer Umgebung von y, und das ist der Inhalt der Inhalt der Aussage (i).
(ii) Wir setzen $x_1 := x$, $y := f(x)$, $k := N_f(f(x)) < \infty$ und wählen $x_2, \ldots, x_k$, $U_1, \ldots, U_k$, V wie in (i), wobei U_1 zusätzlich so klein sei, dass $N_f \circ f \le k$ ist auf $U_1 \cap A$, d.h. jedes $y' \in f(U_1 \cap A)$ hat höchstens k Urbilder in D. Da andererseits jedes $y' \in V$ mindestens k Urbilder besitzt, muss das Urbild $f^{-1}\{y'\}$ eines $y' \in f(U_1 \cap A)$ jede Umgebung U_i in genau einem Punkte treffen, und zwar U_1 in einem Punkte aus A. Die Behauptung gilt daher mit $U := U_1 \cap f^{-1} V$. □
Der Beweis bleibt offenbar auch für stetige, offene Abbildungen von einem Hausdorff-Raum in einen beliebigen topologischen Raum gültig. Das nächste Lemma, zu dessen Nachweis der Bairsche Kategoriensatz herangezogen wird, enthält einen wesentlichen Schritt des Beweises von Satz I. Dabei lehnen wir uns an [14] an. Das Lemma (und der Beweis) gilt allgemeiner für stetige, offene, diskrete Abbildungen von einem lokalkompakten metrischen Raum in einen topologischen Raum.

Lemma 2. *Sei $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ stetig, diskret und offen und sei $Z \neq \emptyset$ relativ abgeschlossen in D. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset D$ derart, dass $U \cap Z \neq \emptyset$, f injektiv auf $U \cap Z$ und $f(U \cap Z) \cap f(U \setminus Z) = \emptyset$ ist.*

Beweis: Wir können, indem wir nötigenfalls D durch eine geeignete offene Teilmenge mit kompaktem Abschluss in D ersetzen, annehmen, dass $f^{-1}\{y\}$ für alle $y \in \mathbf{R}^n$ endlich ist, also $N_f < \infty$ überall auf $\mathbf{R}^n$. Wir definieren $B_k := \{x \in D : N_f(f(x)) \le k\}$ für $k = 1, 2, \ldots$; dann sind die B_k relativ abgeschlossen in D wegen Lemma 1 (i), und wir haben $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = D$ wegen der Endlichkeit von N_f. Aus dem Baireschen Kategoriensatz [9, 11] folgt, dass mindestens eine der Mengen B_k eine

nichtleere, relativ offene Teilmenge A von Z enthalten muss. Auf dieser Menge A ist dann die ganzzahlige Funktion $N_f \circ f$ beschränkt, nimmt also ihr Maximum in einem Punkt $x \in A$ an. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1 (ii). □

Mit Hilfe von Lemma 2 können wir leicht herleiten, dass die Menge der Stellen lokaler Injektivität von f in D dicht liegt. Diese Menge ist nämlich offen, ihr Komplement, die sogenannte *Verzweigungsmenge* Z_f von f, ist also relativ abgeschlossen in D, und wenn Z_f innere Punkte hätte, so könnte man Lemma 2 auf eine in Z_f enthaltene Kugel von positivem Radius anwenden, um zu schliessen, dass f injektiv ist auf einer nichtleeren offenen Teilmente von Z_f im Widerspruch zur Definition der Verzweigungsmenge. Tatsächlich kann man wesentlich stärkere Aussagen über die Kleinheit der Verzweigungsmenge von diskreten offenen Abbildungen zwischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten machen: Z_f, fZ_f und $f^{-1}Z_f$ haben höchstens die Dimension $n-2$ [1, 3, 14]. Wir werden von diesem tieferliegenden Resultat jedoch keinen Gebrauch machen, sondern direkt zeigen, dass die Verzweigungsmenge Z_f unter den Voraussetzungen von Satz I leer ist, das heisst, dass f lokal injektiv ist.

Hierzu benötigen wir noch den Begriff des *Index* einer stetigen, diskreten Funktion $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$. Dies ist eine ganzzahlige Funktion i_f auf D, die mit Hilfe des Abbildungsgrades wie folgt definiert wird:

$$i_f(x) := \deg(f, U, f(x)) \qquad \text{für offene } U \text{ mit kompaktem Abschluss in } D \text{ und } \bar{U} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\}.$$

Grundlegende Eigenschaften des Abbildungsgrades gewährleisten, dass $i_f(x)$ nicht von der Wahl von U abhängt (solange U den angegebenen Bedingungen genügt), und ermöglichen den Beweis der im folgenden Lemma zusammengestellten Aussagen über den Index (siehe [5, 7, 10] und den Beweis von Proposition 2).

Lemma 3. *Sei $f: \mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ stetig und diskret. Dann gilt:*
(i) $i_f(x) = \pm 1$ *für $x \in D \setminus Z_f$ (d.h. wenn f lokal injektiv ist bei x);*
(ii) *i_f ist lokal konstant auf $D \setminus Z_f$;*
(iii) $i_f(x) = \operatorname{sign} \det f'(x)$, *wenn f an der Stelle $x \in D$ differenzierbar ist mit $\det f'(x) \neq 0$;*
(iv) *es gilt $\sum_{x \in f^{-1}\{y\} \cap U} i_f(x) = \deg(f, U, y)$ für offene U mit kompaktem Abschluss in D und $y \in \mathbf{R}^n \setminus f(\partial U)$.*

5. Wir haben nun alle Hilfsmittel bereitgestellt für den

Beweis von Satz I: Wie schon bemerkt, ist f eine stetige, diskrete, offene Abbildung $\mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$. Es ist zu zeigen, dass f auf D lokal injektiv ist, dass also die Verzweigungsmenge Z_f leer ist. Angesichts der Offenheit von f folgt hieraus, dass f lokaler Homöomorphismus ist, und die Differenzierbarkeit der lokalen Umkehrabbildungen sowie die behauptete Formel für ihre Ableitung kann nun genau wie im «klassischen» Fall stetig differenzierbarer Funktionen hergeleitet werden.

Angenommen Z_f ist nicht leer. Dann liefert uns Lemma 2 eine offene Menge $U \subset D$ mit $\emptyset \neq U \cap Z_f$, f injektiv auf $U \cap Z_f$ und $f(U \cap Z_f) \cap f(U \setminus Z_f) = \emptyset$. Wir können annehmen, dass U zusammenhängend mit kompaktem Abschluss in D ist, und dass

gilt $f(\partial U)=\partial(fU)$; um letzteres zu erreichen, ersetzen wir nötigenfalls U durch eine Zusammenhangskomponente U' von $U-f^{-1}(f(\partial U))$, die Z_f trifft. (Dann gilt $fU'\cap f(\partial U)=\emptyset$, $f(\partial U')\subset f(\partial U)$ und somit $f(\partial U')\subset\partial(fU')$; die umgekehrte Inklusion $f(\partial U')\supset\partial(fU')$ folgt aus der Offenheit von f und Kompaktheit von $U'\cup\partial U'$ in D.) Die Einschränkung von f auf $U\backslash Z_f$ ist nun eine Überlagerung; denn f ist lokaler Homöomorphismus auf $D\backslash Z_f$ und jedes $y\in f(U\backslash Z_f)$ hat endlich viele Urbilder in $U\backslash Z_f$, aber wegen $f(U\cap Z_f)\cap f(U\backslash Z_f)=\emptyset$ und $f(\partial U)=\partial(fU)$ kein Urbild in $(U\cap Z_f)\cup\partial U$, so dass $(f^{-1}V)\cap(U\backslash Z_f)$ für hinreichend kleine Umgebungen V von y homöomorph ist zu $V\times f^{-1}\{y\}$.

Um unsere Annahme zu einem Widerspruch zu führen, werden wir zeigen, dass f auf ganz U injektiv ist, was insbesondere $U\subset D\backslash Z_f$ impliziert im Widerspruch zu der oben festgestellten Beziehung $U\cap Z_f\neq\emptyset$. Wegen der Injektivität von f auf $U\cap Z_f$ und wegen $f(U\cap Z_f)\cap f(U\backslash Z_f)=\emptyset$ genügt es, die Injektivität von f auf $U\backslash Z_f$ zu verifizieren. Hierzu betrachten wir eine Zusammenhangskomponente C von $U\backslash Z_f$ und einen Punkt $x_0\in Z_f\cap U$, der im Rand einer ganz in C enthaltenen Kugel B mit Mittelpunkt $x_1\in C$ liegt. (Ein solcher Punkt x_0 existiert, weil $\partial C\subset Z_f\cup\partial U$ und $\partial C\not\subset\partial U$ gilt wegen des Zusammenhangs von U und $U\cap Z_f\neq\emptyset$.) Da fU offen ist mit $y_0:=f(x_0)\in fU$, gilt für hinreichend kleine $t>0$ auch

$$y_t:=f(x_0)+tf'(x_0)(x_1-x_0)\in f(U).$$

Wir behaupten nun, dass für hinreichend kleine $t>0$ das Urbild $f^{-1}\{y_t\}\cap\bar{U}$ ganz in C enthalten ist. Um dies einzusehen, bemerken wir erstens, dass $f^{-1}\{y_t\}\cap\bar{U}\subset U$ ist wegen $f(\partial U)\subset\partial(fU)$ und dass x_0 das einzige Urbild zu $y_0=f(x_0)$ in $\bar{U}$ ist wegen $f(U\cap Z_f)\cap f(U\backslash Z_f)=\emptyset$ und Injektivität von f auf $U\cap Z_f$; hieraus folgt $x_t\to x_0$ bei $t\searrow 0$ für jede Wahl der Urbilder $x_t\in f^{-1}\{y_t\}\cap U$. Zweitens verwenden wir die Existenz und Invertierbarkeit von $f'(x_0)$, um für jedes $x_t\in f^{-1}\{y_t\}\cap U$ die Beziehung

$$\begin{aligned}|x_0+t(x_1-x_0)-x_t| &= |f'(x_0)^{-1}[tf'(x_0)(x_1-x_0)-f'(x_0)(x_t-x_0)|\\ &= |f'(x_0)^{-1}[f(x_t)-f(x_0)-f'(x_0)(x_t-x_0)]|\end{aligned}$$

zu erhalten; hieraus entnimmt man, dass der Abstand von x_t zum Radius $[x_0,x_1]$ der Kugel B bei $t\searrow 0$ schneller gegen Null strebt als $|x_t-x_0|$, so dass jedenfalls x_t in $B\subset C$ liegt für hinreichend kleine $t>0$. Aus Lemma 3 folgt nun, dass f in allen Punkten $x_t\in f^{-1}\{y_t\}\cap U$ denselben Index $+1$ oder -1 besitzt für hinreichend kleine t und dass sich diese Indizes aufaddieren zu $\deg(f,U,y_0)=i_f(x_0)=\pm 1$. Also hat y_t für hinreichend kleine $t>0$ genau ein Urbild in C und keine Urbilder in den von C verschiedenen Komponenten von $U\backslash Z_f$. Die Überlagerungseigenschaft von f auf $U\backslash Z_f$ impliziert aber, dass alle Punkte aus fC in einer beliebig gegebenen Komponente von $U\backslash Z_f$ dieselbe Zahl von Urbildern aufweisen, also ein Urbild in C besitzen und keines in den von C verschiedenen Komponenten von $U\backslash Z_f$. Somit ist $f_{|C}$ injektiv und $f(C)\cap f((U\backslash Z_f)\backslash C)=\emptyset$. Da C selbst eine beliebige Komponente von $U\backslash Z_f$ war, ist hiermit die Injektivität von f auf $U\backslash Z_f$ bewiesen. □

Satz II ist eine einfache Folgerung aus Satz I und Lemma 3:

Beweis von Satz II: Wenn die Jacobi-Determinante von f keine Nullstelle hat, so ist f ein lokaler Homöomorphismus zufolge Satz I. Aus Lemma 3 (ii) folgt dann, dass $i_f(x) = \operatorname{sign} \det f'(x)$ auf der zusammenhängenden Menge D keinen Vorzeichenwechsel hat. □

Ähnlich einfach lässt sich auch umgekehrt Satz I aus Satz II und Lemma 3 herleiten; wir überlassen dies dem Leser.

Wir bemerken abschliessend, dass es vom Gesichtspunkt der Anwendungen her wichtig ist, die Voraussetzung der Invertierbarkeit von $f'(x)$ an allen Stellen $x \in D$ in Satz I dahingehend abzuschwächen, dass diese Forderung nicht erhoben wird für Punkte einer gewissen Ausnahmemenge; man möchte dann immer noch schliessen, dass f ein lokaler Homöomorphismus ist. Resultate in dieser Richtung findet man in [2, 3], woraus man zum Beispiel entnehmen kann, dass im Falle $n \geq 3$ beliebige diskrete Ausnahmemengen zugelassen werden können, sofern f stetig differenzierbar ist, und beliebige Ausnahmemengen der Dimension Null, wenn f n-mal stetig differenzierbar ist. Die Abbildungen $f: \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C} \in z \mapsto z^k \in \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$, $2 \leq k \in \mathbf{Z}$, zeigen, dass im Falle $n = 2$ bei Vorhandensein eines Ausnahmepunktes (hier der Nullpunkt) die lokale Homöomorphie der Abbildung nicht mehr gefolgert werden kann. Wir bemerken ferner, dass die Voraussetzungen an f in Satz I dahingehend abgeschwächt werden können, dass f eine stetige diskrete Abbildung $\mathbf{R}^n \supset D \to \mathbf{R}^n$ ist mit Index $i_f(x) = \pm 1$ überall auf D; abgesehen davon, dass hierbei keinerlei Differenzierbarkeit von f vorausgesetzt wird, kann die Bedingung $i_f(x) = \pm 1$ bei einer differenzierbaren Abbildung f auch dann erfüllt sein, wenn das Differential $f'(x)$ singulär ist (man betrachte etwa $f(x) := |x|^2 x$ im Nullpunkt). Der obige Beweis von Satz I lässt sich allerdings unter dieser abgeschwächten Voraussetzung nicht mehr durchführen, sondern man muss auf tieferliegende topologische Ergebnisse aus [1, 14] zurückgreifen.

Klaus Steffen, Universität Düsseldorf

LITERATURVERZEICHNIS

1 A.V. Chernavskij: Endlich-zu-eins offene Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten (Russisch). Mat. Sbornik (N.S.) *65*, 357–369 (1964); Addendum in Mat. Sbornik (N.S.) *66*, 471–472 (1965).
2 P.T. Church: Differentiable open maps on manifolds. Trans. Am. Math. Soc. *109*, 87–100 (1963).
3 P.T. Church und E. Hemmingsen: Light open maps on n-manifolds. Duke Math. J. *27*, 527–563 (1960).
4 G. Darboux: Mémoire sur les fonctions discontinues. Ann. Ecole Norm. Sup., 2. Ser. *4*, 57–112 (1875).
5 K. Deimling: Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade. Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin 1974.
6 E. Duda: Light open mappings. Proc. Topology Conf. Emery Univ. 1970, Atlanta.
7 N.G. Lloyd: Degree theory. Cambridge University Press, New York 1978.
8 O. Martio, S. Rickman und J. Väisälä: Definitions for quasi-regular mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI *448*, 1–40 (1969).
9 J.C. Oxtoby: Mass und Kategorie. Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin 1971.
10 T. Rado und P.V. Reichelderfer: Continuous transformations in analysis. Grundlehren, Bd. 75. Springer-Verlag, Berlin 1955.
11 W. Rinow: Lehrbuch der Topologie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

12 C.J. Titus und G.S. Young: A Jacobian condition for interiority. Mich. Math. J. *1*, 89–94 (1952).
13 C.J. Titus: Sufficient conditions that a mapping be open. Proc. Am. Math. Soc. *10*, 970–973 (1959).
14 J. Väisälä: Discrete open mappings on *n*-manifolds. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI *392*, 1–10 (1966).

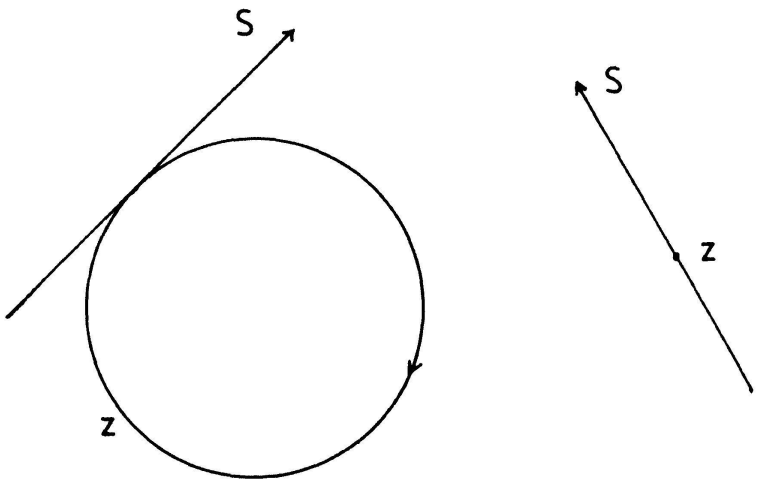
© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/050121-11 $1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

Ein Beispiel zum Rechnen mit Involutionen in der klassischen Laguerre-Geometrie

Unter der klassischen Laguerre-Geometrie der reellen euklidischen Ebene **E** versteht man bekanntlich die folgende Inzidenzstruktur:

1. Die Menge **S** der Speere besteht aus allen orientierten Geraden von **E**. Die dem Speer zugrunde liegende Gerade heisst Trägergerade.
2. Die Menge **Z** der Zykel besteht aus allen Punkten und allen orientierten Kreisen von **E**. Ist $z \in \mathbf{Z}$ ein orientierter Kreis, so heisst der z zugrunde liegende Kreis der Trägerkreis von z.
3. Ist z ein Punkt, so inzidiert z mit $S \in \mathbf{S}$ – in Zeichen $S I z$ –, falls der Punkt auf der Trägergeraden von S liegt. Ist $z \in \mathbf{Z}$ ein orientierter Kreis, so inzidiert z mit S – wie oben durch $S I z$ ausgedrückt –, falls sich die Trägergerade von S und der Trägerkreis von z berühren und überdies die Orientierung von S und z im Berührpunkt übereinstimmen (Fig. 1).



Figur 1

Die gemäss 1, 2 und 3 gebildete Inzidenzstruktur (**S**, **Z**, I) heisst klassische Laguerre-Geometrie.
Wir nennen die Speere S, T parallel, in Zeichen $S \parallel T$, wenn entweder $S = T$ oder wenn es kein $z \in \mathbf{Z}$ mit $S, T I z$ gibt. Man bestätigt unmittelbar die folgenden Aussagen: