Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 5

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Bankoff, P. Erdös und M.S. Klamkin: The asymmetric Propeller. Math. Mag. *46*, 270–272 (1973).
2 H.S.M. Coxeter und S.L. Greitzer: Geometry revisited. New Math. Libr. *19*, Random-House, New York 1967.
3 R.L. Finney: Dynamic Proofs of euclidean Theorems. Math. Mag. *43*, 177–185 (1970).
4 I.M. Yaglom: Geometric Transformations I. New Math. Libr. *8*, Random-House, New York 1962.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/82/050136-12$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 866. Für natürliche Zahlen a, b, c mit $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$ sei

$$S(a,b,c):=\sum_{k=1}^{c-1}(2k-1)[ka/c]^2\,[kb/c]^2,$$

wobei [ ] die Ganzteilfunktion bezeichnet. Man zeige, dass

$$S(a,b,c)+S(b,c,a)+S(c,a,b)=(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Solution with generalization: We shall prove the following statement (which for $m=2$) reduces to the original problem:
Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $\mathbf{N}$ be such that $(a_i, a_j)=1$ for $i \neq j$.
Let

$$S_p=\sum_{k=1}^{a_p-1}\left(k^m-(k-1)^m\right)[ka_1/a_p]^m\cdots\widehat{[ka_p/a_p]^m}\cdots[ka_n/a_p]^m,$$

where $\wedge$ means that the p-th factor is to be omitted.

Then

$$\sum_{p=1}^{n} S_i=(a_1-1)^m(a_2-1)^m\cdots(a_n-1)^m. \qquad (*)$$

Proof: We shall count in two different ways the number of sequences

$$(a_{11},\ldots,a_{1m};\ a_{21},\ldots,a_{2m};\ \ldots;\ a_{n1},\ldots,a_{nm})$$

with $1 \leq a_{1j} < a_1, \ldots, 1 \leq a_{nj} \leq a_n$ for all $1 \leq j \leq m$.
Obviously each a_{ij} can take on $a_i - 1$ different values. This establishes the right hand side of $(*)$.

On the other hand let us consider $\max a_{ij}/a_i$. Suppose that this maximum is attained for $j=p, a_{ij}=k$. Although the value of i does not have to be unique, it follows from $(a_i, a_j)=1$ for all $i \neq j$ that the value of p is unique.
For each $1 \leq k < a_p$ there are $(k^m-(k-1)^m)$ sequences $(a_{p1}, \ldots, a_{pm})$ with $\max_j a_{pj}=k$.
For the $j \neq p$ one must have $a_{ij}/a_i < k/a_p$, i.e. $a_{ij} \leq [k a_i/a_p]$ for all $1 \leq i \leq m$.
So given k and p one has

$$(k^m-(k-1)^m)\,[k a_1/a_p]^m \cdots \widehat{[k a_p/a_p]^m} \cdots [k a_n/a_p]^m$$

possibilities. This establishes the left hand side of $(*)$.

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten B. C. Berndt (Urbana, USA), P. Bundschuh (Köln, BRD).

Aufgabe 867. Man zeige, dass - mit der Zusatzvereinbarung $0^0=1$ - für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-1} [n+k(n-1)]\,k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

W. Janous, Innsbruck, A

Lösung: Für $n \in \mathbf{N}$ setzen wir

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} \tag{1}$$

und behaupten

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Für $n=1$ ist dies richtig und für $n \geqslant 2$ hat man wegen (1)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \frac{n}{k}$$

$$= a_{n-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + \frac{1}{n} = a_{n-1} + \frac{1}{n},$$

was (2) für n beweist, wenn es für $n-1$ richtig ist.
Nun führen wir die Funktion

$$F(x) := n e^{nx} \int_0^x t e^{-t} (1-e^{-t})^{n-1}\, dt \tag{3}$$

ein, die offenbar bei 0 eine Nullstelle der genauen Ordnung $n+1$ besitzt. Partielle Integration liefert

$$F(x)=x(e^x-1)^n-e^{nx}\int_0^x(1-e^{-t})^n\,dt$$

$$=x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{(n-k)x}-x\,e^{nx}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k}e^{(n-k)x}$$

$$-e^{nx}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k},$$

also

$$F(x)=x\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{(n-k)x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k}e^{(n-k)x}+a_n e^{nx}, \tag{4}$$

wenn man (1) berücksichtigt. Taylorentwicklung der rechten Seite von (4) führt zu

$$F(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\left\{a_n n^m-n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}(n-k)^{m-1}(mk+n-k)k^{-2}\right\}.$$

Die Bemerkung im Anschluss an (3) führt für $n\in\mathbf{N}$ zu

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-1}(n+k(m-1))\,k^{-2}\qquad(m=1,\ldots,n),$$

was für $m=n$ die Behauptung der Aufgabe umfasst.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio).

Aufgabe 868. Gegeben sei ein Dreieck; ferner sei:
a eine der drei Dreiecksseiten, A' der Halbierungspunkt von a, k der Umkreis des Dreiecks, M der Mittelpunkt von k, l ein Berührkreis des Dreiecks (In- oder Ankreis), L der Mittelpunkt von l, k' der Feuerbachkreis, F der Mittelpunkt von k', P ein beliebiger Punkt von k'.

Man beweise: Ist P' der Schnittpunkt von k' mit einer Parallelen zu a durch P und P'' der Schnittpunkt von k' mit dem Lot auf ML aus P', dann ist der Schnittpunkt P''' von k' mit der Parallelen zu PA' durch P'' der Berührungspunkt von k' mit l.

E. Ungethüm, Wien, A

LITERATURVERZEICHNIS

E. Ungethüm: Poncelet'sche Dreiecksscharen. El. Math. *34*, 108 (1979).

Lösung:
1. Die Konstruktion von P''' lässt sich so beschreiben (die Geraden p, m, n enthalten F): Spiegel A' an p (beliebig) nach P, P an der Parallelen m zu MA' nach P', P' an

der Parallelen n zu LM nach P'' und P'' an p nach P''', d.h. $P'''=pnmp(A')$ $=mppn(A')=mn(A')$. (Das Produkt zweier Spiegelungen ist eine Drehung. Drehungen um F sind vertauschbar.) P''' ist also unabhängig von der Wahl von P auf k' und entsteht aus A' durch Drehung um F um $2 \cdot \sphericalangle(n,m)=2 \cdot \sphericalangle LMA'$.
2. Bezeichne ABC das gegebene Dreieck und der Index 0 jeweils den an der Winkelhalbierenden AL gespiegelten Punkt. Die Tangenten von U (Schnittpunkt von AL und a) an l berühren l in T_0 (auf a) und T. UT ist parallel zur Tangente an k' in A' und zur Tangente an k in A (Winkelbilanz!) Da sich k' und l berühren, trifft daher $A'Tl$ und k' im Berührpunkt S von l und k' und es ist $\sphericalangle TLS=\sphericalangle A'FS$ $=2 \cdot \sphericalangle LMA'=2 \cdot \sphericalangle(n,m)$, denn LM ist Mittelsenkrechte von T_0S_0. [Ist o.B.d.A. $W:=(0,-1)$ der Schnittpunkt von AL und MA', $\varepsilon:=\sphericalangle A'WA$, $R:=WL=WC$, dann erhält man (+ für den Inkreis, − für den Ankreis an a) $M=\left(0,(R^2/2)-1\right)$, $L=(\pm R\sin\varepsilon, -1 \pm R\cos\varepsilon)$, $A_0=(2\sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon, -2\sin^2\varepsilon)$, $T_0=(\pm R\sin\varepsilon, 0)$. Daraus folgt sofort $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{A_0T_0}=0$.] Mit Lösung 1 ergibt sich somit die Behauptung: $P'''=S$.

W. Vinzenz, Maisach, BRD

Weitere Lösungen sandten J.T. Groenman (Groningen, NL), O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1983* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 885. In einer hyperbolischen Ebene bezeichne U_n die Grenzfigur einer Folge regulärer n-Ecke, deren Seiten unbeschränkt wachsen derart, dass aufeinanderfolgende Seiten schliesslich parallel werden. Die Berührungspunkte des dem Polygon U_n einbeschriebenen Kreises mit den Seiten von U_n bilden die Ecken eines regulären n-Ecks P_n. Man berechne die Winkel von P_n.

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 886. Es sei

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix einer Markovkette. Die Zufallsvariable T sei definiert als die Anzahl der bis zur Absorption erforderlichen Schritte. Man bestimme $\mathrm{Var}(T)$.

U. Abel, L. Pilz, Heidelberg, BRD

Aufgabe 887A. Es bezeichne $m(n,k)$ die kleinste natürliche Zahl, die genau k Teiler $\leq n$ besitzt, $n,k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq n$. Beispiel: $m(10,6)=24$. Man zeige, dass $m(n,k)$ für jedes k bei beliebig vorgegebenem n existiert. Das Problem ist für $n > n_0$ gelöst. Es wird aber ein direkter Beweis für alle n gewünscht. P. Erdös

Literaturüberschau

H.-P. Axmann: Einführung in die technische Informatik. Funktionsweise digitaler Bausteine und deren Verwendung in Datenerfassungssystemen. XII und 289 Seiten, zahlreiche Abbildungen, DM 46.-. Springer, Wien, New York 1979.

Hervorgegangen aus einer Vorlesung für Physiker und Chemiker, richtet sich dieses Lehrbuch an einen Leserkreis, der keine Grundausbildung in Digitaltechnik hat, aber auf Kenntnisse in der Prozeßsteuerung und der dabei anfallenden Datenverarbeitung angewiesen ist. Das Buch beschreibt die Funktionsweise und die allgemeine Anwendung von digitalen Schaltungen.

Die ersten Kapitel enthalten eine Einführung in die Schaltalgebra (für das Verständnis werden Vorkenntnisse in Mengenlehre vorausgesetzt). Man muss sich allerdings fragen, ob der Autor bezüglich des im Vorwort abgesteckten Rahmens nicht etwas zu weit ausholt. Im Rahmen einer Einführung eher verwirrend sind dabei die Bemerkungen über positive und negative Logik. Im folgenden Teil des Buches werden dem Leser die verschiedenen Logikfamilien vorgestellt. Die zum Teil eingehende Behandlung ist für den Praktiker wertvoll. Es scheint jedoch zweifelhaft, ob ein Leser ohne elektrotechnische Vorkenntnisse nur aufgrund der am Eingang des Kapitels gegebenen Einführung die Wirkungsweise der einzelnen Transistorschaltungen verstehen kann. Ein weiteres Kapitel ist den Rechenregeln der dualen Arithmetik und der Behandlung der verschiedenen, im Zusammenhang mit Computern verwendeten, polyadischen Zahlensysteme gewidmet: Dieser Teil sticht durch den klaren und übersichtlichen Aufbau hervor. Ein nächster Abschnitt über Schaltwerke beinhaltet eine ausführliche Zusammenstellung der verschiedenen Flip-Flop- und Zählertypen. Im letzten Kapitel über Datenmanipulation und -verarbeitung werden komplexe Baublöcke wie Multiplexer, Demultiplexer, Analog-Digitalwandler und die verschiedenen Halbleiterspeichertypen vorgestellt. Abgerundet wird das Buch mit einer kurzen Abhandlung über Mikroprozessoren.

Als Einführung ins Gebiet hätte man vielleicht besser auf die Beschreibung einiger Details verzichtet, denen dann doch nicht genug Raum für eine dem Anfänger verständliche Behandlung eingeräumt werden kann, während sie für den Fachmann nicht genügt. Im grossen ganzen scheint aber das Buch seiner Zielsetzung gerecht zu werden. Ein flüssiger Stil, welcher jeglichen unnötigen Fachjargon vermeidet, erleichtert die Stoffverarbeitung. W. Guggenbühl

H.R. Schwarz: Methode der finiten Elemente. Teubner-Studienbücher Mathematik, 320 Seiten, 155 Figuren, 49 Tabellen, DM 29.80. Teubner, Stuttgart 1980.

Das vorliegende Lehrbuch bringt eine gründliche Einführung in die Methode der finiten Elemente unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis und ohne Berücksichtigung der Fehlertheorie in Sobolevräumen. Sie beginnt mit dem klassischen Ritz-Ansatz der Variationsrechnung. Bei der Berechnung der Elementmatrizen wird ausführlich auf die Probleme bei krummlinigen Rändern eingegangen. Bei der Behandlung des Gesamtproblems werden verschiedene Algorithmen zur optimalen Numerierung der Knotenvariablen vorgestellt. Die sehr wichtigen Rechentechniken zur Lösung der grossen schwachbesetzten Gleichungssysteme sind ausführlich dargestellt. Ausserdem wird der Behandlung der Eigenwertaufgaben breiter Raum gegeben. Immer wieder wird die Theorie mit typischen Anwendungsbeispielen illustriert. Die Resultate für diese Beispiele sind im letzten Kapitel dargestellt.

Da im Buch oft neuere Forschungsresultate vorgestellt werden, dürfte es auch dem Fachmann noch wichtige Anregungen geben können. Es kann in seiner klaren Darstellung, die an vielen didaktischen Feinheiten erkennbar wird, auch sehr zum Selbststudium empfohlen werden. Es wird dem Anspruch, ein Lehrbuch der numerischen Mathematik zu sein, vollumfänglich gerecht, und es ist zu wünschen, dass es als Grundlage für Vorlesungen weite Verbreitung findet. H.-P. Hoidn