Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 873. Prove that if $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ and $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s, n \in \mathbf{N}$, then

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+s-x_i} + \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) \leqslant 1 .$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

Lösung: Beweis durch Induktion: Für $n=1$ ist nichts zu zeigen. Gilt die Ungleichung für ein $n \geqslant 1$ und führt man die Funktion

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad x_{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{1+s-x_i} + \prod_{i=1}^{n+1} (1-x_i)$$

ein, so ist wegen

$$f''(x_{n+1}) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(1+s-x_i)^3} \geqslant 0$$

die Funktion f konvex, und mit $f(0) \leqslant 1$ nach Induktionsannahme sowie $f(1) = \sum x_i/(1+s-x_i) \leqslant \sum x_i/s = 1$ ergibt sich die Behauptung.

K. Bickel, Freiburg, BRD

Bemerkung: M. S. Klamkin (Edmonton, Alberta, CDN) weist darauf hin, dass der Fall $n=3$ als Aufgabe anlässlich der USA Mathematikolympiade 1980 gestellt wurde.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), M. S. Klamkin (Edmonton, CDN), Chr. A. Meyer (Ittigen), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

Aufgabe 874. Gegeben sind drei konzentrische Kreise mit Radien r_1, r_2, r_3, deren Ebenen paarweise zueinander senkrecht sind. Existiert ein Dreieck, dessen Seiten sich wie $r_1^{-2} : r_2^{-2} : r_3^{-2}$ verhalten, so gibt es 8 (im Grenzfall vier) Ebenen, welche die drei Kreise berühren, andernfalls keine. Man zeige dies und beschreibe die Konstruktion der fraglichen Ebenen im möglichen Fall.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Wir können die drei Kreisebenen als kartesische Koordinatenebenen π_1, π_2, π_3 auffassen (der Kreis k_1 vom Radius r_1 liege in π_1 usw.) und ihre drei Schnittgeraden x_1, x_2, x_3 als Koordinatenachsen; dabei sei $x_i = \pi_j \cap \pi_k$, mit $(i, j, k) = \text{zykl.}\,(1, 2, 3)$.

Jene die drei Kreise berührende Ebene ε habe die Spuren e_1, e_2, e_3; dabei liege die Spurgerade e_i in π_i und berühre den Kreis $k_i, i = 1, 2, 3$. Der Radius r_i ist also gleichzeitig der (minimale) Abstand der Spur e_i vom Ursprung, dem gemeinsamen Zentrum der drei Kreise.

Weil die Achsenabschnitte von e_i mindestens r_j bzw. r_k betragen (im Grenzfall stünde die fragliche Ebene ε normal auf π_i, wäre also projizierend), muss r_i mindestens so gross sein wie die Höhe im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten r_j und r_k. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$r_i \geq r_j r_k / \sqrt{r_j^2 + r_k^2}.$$

Quadrieren und Bilden des Kehrwertes auf beiden Seiten liefert die Ungleichungen

$$r_i^{-2} \leq r_j^{-2} + r_k^{-2}; \qquad (i,j,k) = \text{zykl.}\,(1,2,3).$$

Diese Beziehung ist aber genau dann erfüllt, wenn $r_1^{-2}, r_2^{-2}, r_3^{-2}$ Seiten eines (eventuell ausgearteten) Dreiecks sind.
Bezeichnen wir die Achsenabschnitte von ε mit a_1, a_2 bzw. a_3, so gewinnen wir – analog wie oben – das folgende Gleichungssystem:

$$a_i^{-2} + a_j^{-2} = r_k^{-2}; \qquad (i,j,k) = \text{zykl.}\,(1,2,3).$$

Daraus erhält man etwa für den x_1-Achsenabschnitt a_1 den Term

$$\pm \sqrt{2} / \sqrt{-r_1^{-2} + r_2^{-2} + r_3^{-2}}, \tag{*}$$

so dass $|a_1|$ in geläufiger Weise konstruiert werden kann. Die Strecke $|a_1|$ trägt man nun vom Ursprung aus auf der x_1-Achse nach beiden Seiten ab und legt von den erhaltenen Achsenabschnittendpunkten je zwei Tangenten an die beiden Kreise k_2 und k_3. Man gewinnt so von beiden Seiten her je vier Ebenen, welche ein bezüglich des Ursprungs zentralsymmetrisches Oktaeder begrenzen.
Verschwindet der Nennerradikand von (*), so wird $|a_1|$ unendlich gross, und man erhält nur noch vier verschiedene Ebenen mit den Achsenabschnitten $(a_1, a_2, a_3) = (\pm\infty, \pm r_2, \pm r_3)$, welche ein gerades Prisma mit rhombischem Querschnitt bilden.
Ist der Nennerradikand in (*) negativ, so gibt es überhaupt keine die drei Kreise berührende Ebenen mehr; aber dann sind r_1^{-2}, r_2^{-2} und r_3^{-2} auch keine Dreiecksseiten mehr!

Hj. Stocker, Wädenswil ZH

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenmann (Arnhem, NL), L. Kuipers (Sierre VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. D. Mascioni (Origlio), J. Schaer (Calgary, CDN), E. Ungethüm (Wien, A).

Aufgabe 875. $p_1(n) < p_2(n) < \cdots < p_k(n)$ seien die Primfaktoren von n und es werde

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(n) / p_{i+1}(n)$$

gesetzt (für $k = 1$ sei $f(n) = 0$). Man zeige die Existenz einer Konstante C, so dass

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = (C + o(1))\, x.$$

K. Alladi und P. Erdös

Lösung: Im folgenden bedeuten p, q und r Primzahlen. Für $q<p\leqslant x$ bezeichnen wir mit $N(p,q;x)$ die Anzahl der Zahlen $n\leqslant x$ mit $n\equiv 0 \pmod{pq}$, $n\not\equiv 0 \pmod{r}$ für alle Primzahlen r mit $q<r<p$. Dann gilt

$$F(x)=\sum_{q<p\leqslant x}\frac{q}{p}N(p,q;x). \tag{1}$$

Für $q<p$ gilt nach dem Chinesischen Restsatz

$$N(p,q;x)\sim x(pq)^{-1}\prod_{q<r<p}(1-r^{-1}). \tag{2}$$

Aus $N(p,q;x)\leq x/(pq)$ folgt, dass der Beitrag der Glieder q/p mit $p>y$ zu $F(x)$ kleiner ist als $x\cdot\sum_{p>y}\pi(p)/p^2$. Für $\varepsilon>0$ und y genügend gross, ist dieser Beitrag also $<\varepsilon x$, weil die Reihe $\sum\pi(p)/p^2$ konvergiert. (*)
Wir definieren jetzt

$$g(p):=\sum_{q<p}\prod_{q<r<p}(1-r^{-1}). \tag{3}$$

Es gilt $g(p)<\pi(p)$. Weil $\sum\pi(p)p^{-2}$ konvergiert, folgt jetzt aus (*), (1) und (2)

$$F(x)\sim Cx \qquad (x\to\infty)$$

mit

$$C:=\sum_p g(p)/p^2.$$

J. H. van Lint, Eindhoven, NL

Eine weitere Lösung sandte E. Trost†.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1983* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 891. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 (f(x))^2\,dx.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Aufgabe 892. Für natürliche Zahlen n sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n)\,dt.$$

Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$.

U. Abel, Giessen, BRD

Aufgabe 893. Es sei p eine ungerade Primzahl, g eine Primitivwurzel $\bmod p$ und m eine prime Restklasse $\bmod p$. Man zeige, dass für $x \not\equiv 0 \pmod p$

$$\operatorname{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} x^i \pmod p.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{ind}_g x$ die kleinste der natürlichen Zahlen k, für die $m \equiv g^k \pmod p$ erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Elementarmathematik und Didaktik

The sum of the s-th power of the integers

The purpose of this brief note is to present a derivation of the familiar formula for the sum of the squares of the first n integers, i.e. $\sum_{k=1}^n k^2$. This method is easy to remember, having an almost geometric character, and it can be iterated in a very simple manner to yield the sum of the first n integers raised to any positive integral power.