Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1983)

Heft: 3

Artikel: Das Gegenstück zu logarithmischen Spirale in der ebenen isotropen Geometrie

Autor: Vetter, Wilhelm

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37186

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

This inequality, as easily verified, implies $h_1 b_1 h_2 b_2 \leq 16$, that is, $|T_1| \cdot |T_2| \leq 4$. Therefore either $|T_1| \leq 2$ or $|T_2| \leq 2$, which completes the proof.

Remark: If for some θ, $|T_1| \cdot |T_2| = 4$, then K is a polygon with at most 6 sides.

W. Kuperberg, Auburn University, Auburn, Alabama, USA

REFERENCES

1 G.D. Chakerian: Minimum area of circumscribed polygons. El. Math. *28*, 108–111 (1973).
2 G.D. Chakerian and L.H. Lange: Geometric extremum problems. Math. Mag. *44*, 57–69 (1971).
3 W. Gross: Über affine Geometrie XIII: Eine Minimumeigenschaft der Ellipse und des Ellipsoids. Leipziger Ber. *70*, 38–54 (1918).
4 J.L. Hodges, Jr.: An extremal problem of geometry. J. Lond. Math. Soc. *26*, 311–312 (1951).
5 E. Sas: Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen. Compositio Math. *6*, 468–470 (1939).
6 L. Fejes Toth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer Verlag, 1953.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/030057-05$1.50 + 0.20/0

Das Gegenstück zur logarithmischen Spirale in der ebenen isotropen Geometrie

Die logarithmische Spirale der euklidischen Ebene wurde von Descartes und Toricelli um 1638 entdeckt und erhielt ihren Namen 1704 von Varignon. Wegen vieler markanter Eigenschaften [1–4, 9–11] gehört sie mit zu den interessantesten ebenen Kurven, und es erweist sich als lohnend, ihr Gegenstück in der isotropen Ebene zu studieren. Die isotrope Geometrie wurde wesentlich von K. Strubecker gefördert und durch Beiträge in neuerer Zeit weiterentwickelt. Sie besitzt eine von der euklidischen Geometrie abweichende Metrik. Wir verzichten auf die Darstellung dieser Grundlagen und verweisen statt dessen auf die Literatur [7]. In der Arbeit über die äquiforme Geometrie der isotropen Ebene [5] hat K. Strubecker auf die isotropen logarithmischen Spiralen hingewiesen. Wir behandeln diese Kurvenklasse im Rahmen der Bewegungsgeometrie, wobei viele klassische differentialgeometrische Ergebnisse ihre isotrope Entsprechung finden.

1. Definition und einfache Eigenschaften

Jede Isogonaltrajektorie eines Geradenbüschels mit eigentlichem Trägerpunkt Z heisst *logarithmische Spirale*. Besitzt Z die Koordinaten (b, d), dann wird eine logarithmische Spirale beschrieben durch die Differentialgleichung

$$y' = a + \frac{y-d}{x-b}, \qquad a, b, d \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0, \quad x \neq b; \tag{1}$$

dabei ist a der *Schnittwinkel* der Isogonaltrajektorie mit den Büschelgeraden. Die Differentialgleichung (1) besitzt die allgemeine Lösung

$$y = a(x-b)\ln|x-b| + c(x-b) + d, \qquad c \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Zu vorgegebenem Trägerpunkt Z und Schnittwinkel a stellt (2) mit c als Parameter eine einparametrige Schar kongruenter Kurven dar (Fig. 1). Wir greifen eine beliebige Scharkurve S heraus und erhalten bezüglich der dreigliedrigen Gruppe G_3 der isotropen Bewegungen

$$\begin{aligned} x' &= p + x \\ y' &= q + rx + y \end{aligned} \tag{3}$$

die Normalform

$$y = a x \ln|x| \,. \tag{4}$$

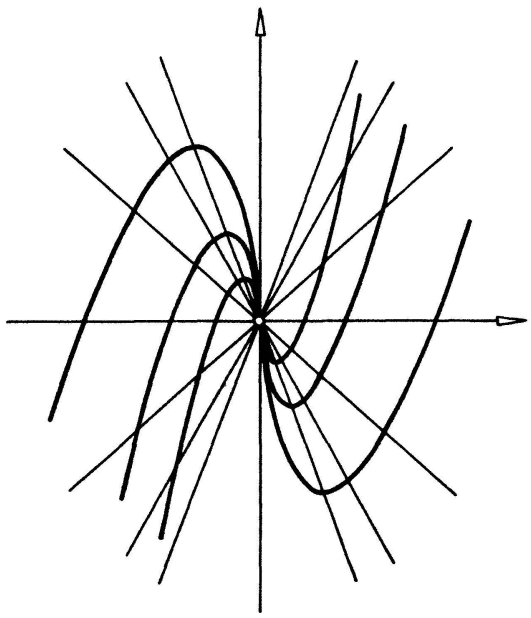
Aus (4) folgt, dass eine logarithmische Spirale der isotropen Ebene gegenüber der Gruppe der isotropen Bewegungen den Schnittwinkel a als einzige kennzeichnende Invariante besitzt. Wegen

$$\lim_{x \to 0} a x \ln|x| = 0 \tag{5}$$

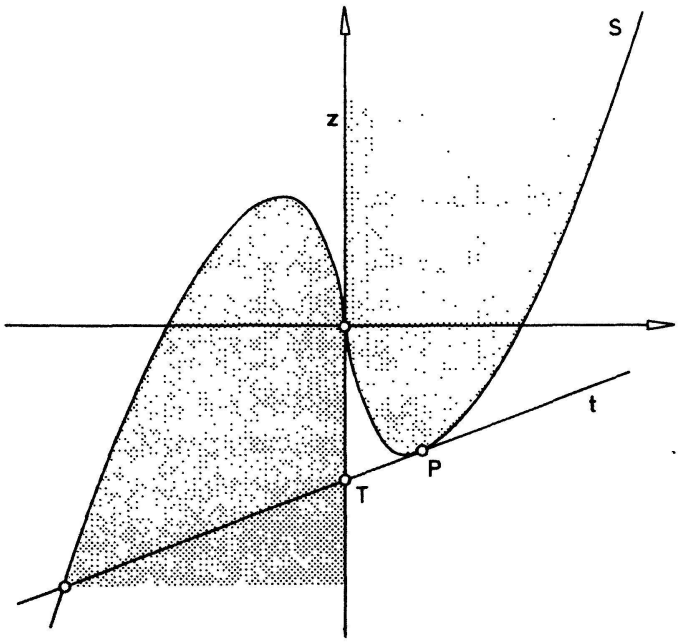
heisst der Punkt Z *asymptotischer Punkt* oder auch *Zentrum* der Spirale. Bezüglich ihres Zentrums ist jede logarithmische Spirale symmetrisch; sie zerfällt in zwei Zweige.
Die isotrope Gerade z durch das Zentrum Z heisst *asymptotische Gerade* oder *Zentrale* der logarithmischen Spirale. Diese ist wegen

$$y' = a(1 + \ln|x|), \qquad \lim_{x \to \mp 0} y' = -\infty \operatorname{sgn} a, \qquad \lim_{x \to \mp \infty} y' = +\infty \operatorname{sgn} a \tag{6}$$

ihre einzige Asymptote.



Figur 1



Figur 2

Gegenüber der viergliedrigen Gruppe G_4 der isotropen Ähnlichkeiten

$$\left.\begin{aligned} x' &= p + x \\ y' &= q + rx + sy \end{aligned}\right\} s \neq 0 \tag{7}$$

besitzt die logarithmische Spirale S die Normalform

$$y = x \ln |x| \,. \tag{8}$$

Somit können die logarithmischen Spiralen bezüglich G_4 nicht voneinander unterschieden werden; sie sind alle zueinander ähnlich.
Die Gleichung der Tangente t im Spiralpunkt $P(x_0, y_0)$ lautet

$$y = ax(1 + \ln |x_0|) - ax_0, \qquad x_0 \neq 0; \tag{9}$$

ihr Schnittpunkt T mit der Zentralen z bestimmt die Tangentenspanne

$$\overline{TZ} = a x_0 . \tag{10}$$

Wegen (6) besitzt jede Tangente t einer logarithmischen Spirale ausser ihrem Berührpunkt noch genau einen weiteren Schnittpunkt mit dem anderen Zweig der Spirale.
Eine Spirale und ihre Zentrale zerlegen die isotrope Ebene in vier offene Teilflächen. Die durch

$$y > ax \ln |x| \wedge ax > 0, \qquad y < ax \ln |x| \wedge ax < 0 \tag{11}$$

gegebenen Teilflächen sind konvex; sie bilden den *Innenbereich*. Die durch

$$y < ax \ln |x| \wedge ax > 0, \qquad y > ax \ln |x| \wedge ax < 0 \tag{12}$$

gegebenen Teilflächen bilden den *Aussenbereich* (Fig. 2). Mit Hilfe dieser beiden Begriffe geben wir eine Übersicht über die Anzahl der Spiraltangenten durch einen beliebigen Punkt P der Ebene.

P liegt	Anzahl der Tangenten
im Aussenbereich	3
auf der Spirale	2
im Innenbereich oder auf der Zentrale z $(P \neq Z)$	1
$P = Z$	0

Eine beliebige Gerade hat mit der Spirale höchstens drei Punkte gemeinsam.

2. Krümmungsverhalten

Analog zum euklidischen Fall ist die *Krümmung* $\varkappa$ in einem Spiralpunkt

$$\varkappa = y'' = \frac{a}{x}, \qquad x \neq 0 \tag{13}$$

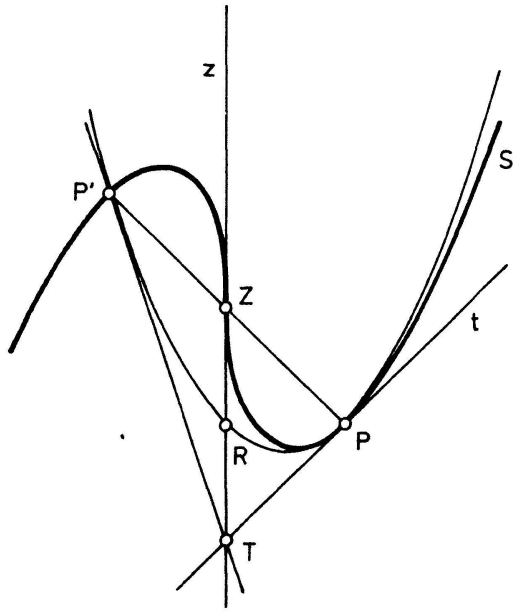
zu seiner Entfernung vom Zentrum umgekehrt proportional. Für den *Krümmungskreis* im Spiralpunkt $P(x_0, y_0)$ findet man die Gleichung

$$y = \frac{a}{2x_0} x^2 + a x \ln|x_0| - \frac{a x_0}{2}, \tag{14}$$

und wegen

$$y(x_0) = -y(-x_0), \qquad y(0) = -\frac{a x_0}{2} \tag{15}$$

folgt, dass auf diesem Krümmungskreis auch der zu P zentrisch symmetrische Punkt P' liegt. Der Schnittpunkt R des Krümmungskreises mit der Zentralen z halbiert die Tangentenstrecke TZ; die zu den beiden Spiralpunkten P, P' gehörenden Krümmungskreise sind bezüglich der nichtisotropen Geraden PP' achsensymmetrisch (Fig. 3).



Figur 3

3. Spirale und Kreis

Ein isotroper Kreis k parabolischen Typs durch das Zentrum Z einer Spirale sei gegeben durch

$$y = \frac{l}{2} x^2 + m x, \qquad l \neq 0; \tag{16}$$

seine Schnittpunkte mit der Spirale S genügen der Gleichung

$$a \ln |x| - \frac{l}{2} x - m = 0. \tag{17}$$

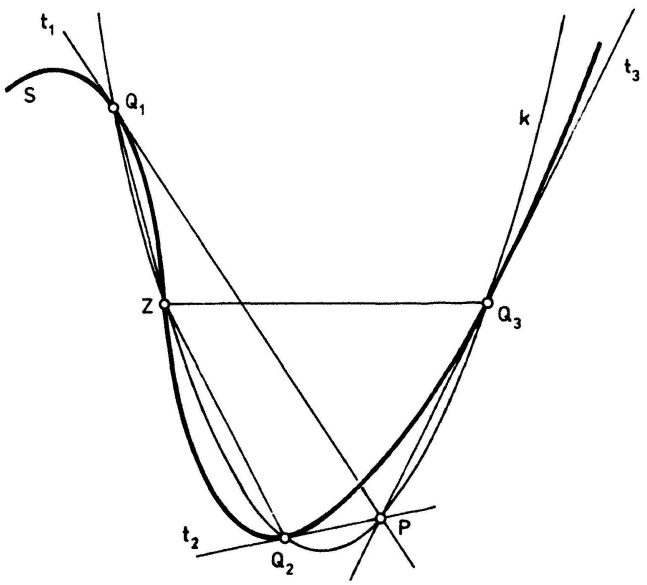
Als Bedingung für die Anzahl der Schnittpunkte findet man

$$a \ln \left| \frac{2a}{l} \right| - a - m \gtreqless 0 \begin{cases} \text{3 Lösungen} \\ \text{2 Lösungen} \\ \text{1 Lösung} \end{cases} \tag{18}$$

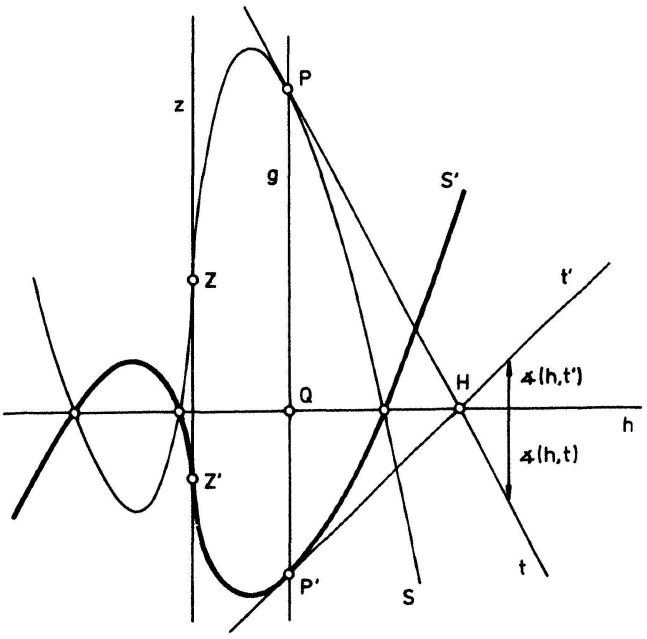
und erkennt unter Benützung des Peripheriewinkelsatzes für den Kreis ([7], S. 347) die Gültigkeit der beiden folgenden, für die Spiralgeometrie typischen Sätze (Fig. 4).

Satz 1. *Hat ein Kreis k durch das Zentrum Z einer Spirale mit dieser drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 gemeinsam, so schneiden sich die drei zugehörigen Spiraltangenten t_1, t_2, t_3 in einem Kreispunkt P, der im Aussenbereich der Spirale liegt. Ist umgekehrt P ein Punkt des Aussenbereichs einer Spirale und sind t_1, t_2, t_3 die drei Spiraltangenten durch P, so liegen deren Berührpunkte Q_1, Q_2, Q_3 zusammen mit P und dem Zentrum Z auf einem Kreis.*

Satz 2. *Hat ein Kreis k durch das Zentrum Z einer Spirale mit dieser zwei Punkte Q_1, Q_2 gemeinsam, wobei Q_2 der Berührpunkt ist, so schneiden sich die zwei zugehörigen Spiraltangenten t_1, t_2 im Punkt Q_2. Ist umgekehrt P ein Spiralpunkt und sind t_1, t_2 die zwei Spiraltangenten durch P, dann liegen deren Berührpunkte P, Q zusammen mit dem Zentrum Z auf einem Kreis, der die Spirale im Punkt P berührt.*



Figur 4



Figur 5

4. Peripheriewinkelsatz

Zu zwei Spiralpunkten $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)\in S$, $P\neq Q$ gibt es genau eine isotrope *Möbiusinvolution* ([7], S. 350), die
1. die Spirale S invariant lässt und
2. die Punkte P und Q vertauscht:

$$x'=\frac{x_1x_2}{x}, \qquad y'=-x_1x_2\frac{y}{x^2}+(x_1y_2+x_2y_1)\frac{1}{x}\cdot \tag{19}$$

Hiermit beweisen wir einen weiteren typischen Satz aus der Spiralgeometrie.

Satz 3 *(Peripheriewinkelsatz). Sind die Spiralpunkte $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)\in S$, $P\neq Q$ und ebenso die Spiralpunkte $U(x_3,y_3)$, $V(x_4,y_4)\in S$ einander mittels derselben Möbiusinvolution zugeordnet, dann gilt*

$$\sphericalangle PUQ+\sphericalangle PVQ=\sphericalangle PZQ\,. \tag{20}$$

Beweis: Einfache Notation von

$$\sphericalangle PUQ=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}-\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}, \qquad \sphericalangle PVQ=\frac{y_2-y_4}{x_2-x_4}-\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4},$$
$$\sphericalangle PZQ=\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_1}{x_1} \tag{21}$$

liefert unter Verwendung von (19)

$$x_4=\frac{x_1x_2}{x_3}, \qquad y_4=-x_1x_2\frac{y_3}{x_3^2}+(x_1y_2+x_2y_1)\frac{1}{x_3} \tag{22}$$

nach kurzer Rechnung die behauptete Gleichheit.

5. Spiralenpaare

Zwei verschiedene Spiralen S, S' mit gemeinsamer Zentrale z seien gegeben durch die Gleichungen

$$y-ax\ln|x|-cx-d=0, \qquad y-a'x\ln|x|-c'x-d'=0, \tag{23}$$

wir betrachten das durch sie definierte Büschel

$$\lambda(y-ax\ln|x|-cx-d)+\mu(y-a'x\ln|x|-c'x-d')=0, \qquad \lambda,\mu\in\mathbf{R}\,. \tag{24}$$

Für $\lambda:\mu=-a':a$ erhält man die Gleichung einer Geraden h

$$(a-a')y-(ac'-a'c)x-(ad'-a'd)=0, \tag{25}$$

die die Achse des Büschels darstellt (Fig. 5). Sie ist isotrop für $a=a'$, andernfalls nichtisotrop; letzteres sei für die weitere Betrachtung vorausgesetzt.
Die Spirale S kann auf S' abgebildet werden durch eine isotrope Ähnlichkeit (7) mit

$$p=0, \qquad q=(ad'-a'd):a, \qquad r=(ac'-a'c):a, \qquad s=a':a; \tag{26}$$

die Achse h ist ihre Fixpunktgerade. Hieraus resultierten die folgenden Aussagen.

Satz 4. *1. Die Schnittpunkte zweier Spiralen S, S' mit gemeinsamer Zentrale z und verschiedener Invariante $(a \neq a')$ liegen auf einer nichtisotropen Geraden h, die die Achse des durch S und S' definierten Büschels ist. Die Maximalzahl der Schnittpunkte ist daher drei.*
2. Das Teilverhältnis der drei Schnittpunkte P, P', Q einer beliebigen isotropen Geraden $g \neq z$ mit S, S', h ist konstant

$$\overline{QP'}:\overline{QP}=a':a. \tag{27}$$

3. Der Schnittpunkt H der beiden Spiraltangenten t, t' in zwei parallelen Punkten $P \in S, P' \in S'$ liegt auf der Achse h. Das Teilverhältnis der drei kopunktalen Geraden t, t', h ist konstant

$$\sphericalangle(h,t'):\sphericalangle(h,t)=a':a. \tag{28}$$

4. Es gibt genau zwei Paare (P, P') paralleler Punkte mit der Eigenschaft, dass die zugehörigen Tangenten t, t' parallel zueinander sind; alle vier Tangenten t_1, t_1', t_2, t_2' sind dann auch parallel zur Achse h; P_1 und P_2 liegen zentrisch symmetrisch auf S, ebenso P_1' und P_2' auf S'.

6. Spiralsektoren

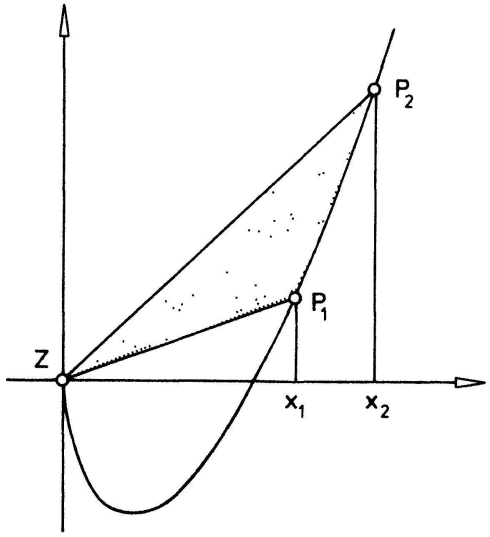
Für den Flächeninhalt f eines *Spiralsektors*, der gegeben ist durch die beiden Radien $\overline{ZP_1}$ und $\overline{ZP_2}$ (Fig. 6), erhält man

$$f=\frac{a}{2}x_2^2\ln|x_2|-\frac{a}{2}x_1^2\ln|x_1|-\int_{x_1}^{x_2}ax\ln|x|\,dx=\frac{a}{4}(x_2^2-x_1^2). \tag{29}$$

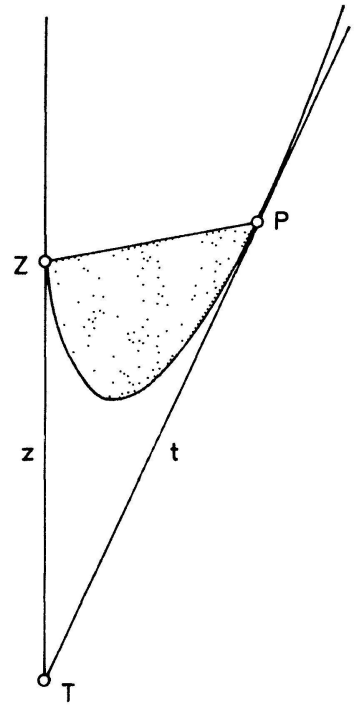
Für $P_1=Z$ ist $x_1=0$ und somit

$$f=\frac{a}{4}x_2^2; \tag{30}$$

zusammen mit (10) folgt (Fig. 7)



Figur 6



Figur 7

Satz 5. *Für jeden Spiralpunkt P wird die Fläche des Dreiecks PZT, das bestimmt ist durch die Zentrale z, die Tangente t im Spiralpunkt P und den Radius $\overline{ZP}$, von der Spirale halbiert*[1]).

7. Brennkurven

Jene Gerade durch den Spiralpunkt $P(x_0, y_0)$, die mit der Tangente in P den gleichen Winkel einschliesst wie die Tangente mit dem Radius $\overline{ZP}$, besitzt die Gleichung

$$y = 2a(x - x_0) + ax \ln|x_0| \,. \tag{31}$$

Die Einhüllende dieser Geradenschar mit dem Parameter x_0 wird beschrieben durch die Gleichung

$$y = ax(\ln|x| + 1 - \ln 2) \,. \tag{32}$$

In Entsprechung zu einem klassischen Resultat ([1], S. 402) gilt

Satz 6. *Die logarithmische Spirale ist zu ihrer Brennkurve kongruent; beide Kurven gehen durch eine Drehung um das Zentrum Z und den Winkel* $\mp a(1 - \ln 2)$ *auseinander hervor.*

Wilhelm Vetter, München

1) Ein ähnliches Resultat gilt bekanntlich für die Parabel (parabolischer Kreis), wobei die Fläche des Sehnentangenten-Dreiecks von der Kurve im Verhältnis 1:2 geteilt wird.

LITERATURVERZEICHNIS

1 K. Fladt: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt 1962.
2 G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig 1910.
3 H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. Essen 1949.
4 K. Strubecker: Differentialgeometrie I, Kurventheorie der Ebene und des Raumes. Berlin 1964.
5 K. Strubecker: Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene. Arch. Math. *3*, 145-153 (1952).
6 K. Strubecker: Über die Parabeln zweiter bis vierter Ordnung I/II/III. PM *4*, 141-144, 169-174, 197-201 (1962).
7 K. Strubecker: Geometrie in einer isotropen Ebene. MNU *15*, 297-306, 343-351, 385-394 (1962/63), und Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 1.
8 W. Vetter: Die Sichel des Archimedes. Eine Verallgemeinerung für die logarithmische Spirale. PM *24*, 54-56 (1982).
9 W. Vetter: Über die Peripheriewinkel der logarithmischen Spirale. Erscheint in PM.
10 H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven. Leipzig 1908.
11 W. Wunderlich: Darstellende Geometrie II. Mannheim 1967.
12 I.M. Yaglom: A simple non-euclidean geometry and its physical basis. New York 1979.
13 H. Zeitler: Über Brennkurven. DdM 1980, 1-11.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/030061-09$1.50 + 0.20/0

The lattice polytope problem

It has long been known ([6], p. 50) that the only regular polygons that can be embedded in the cubic lattice of E^n are the square (for $n \geqslant 2$), the triangle and the hexagon (both for $n \geqslant 3$). However, the analogous results for polytopes of higher dimension have not yet been fully described ([3], p. 46). In the present paper, we shall determine exactly which regular polytopes can be embedded in which regular polytopal lattices.

We shall be using the standard Schläfli notation, specifically:

(i) The symbol $\{n\}$ denotes a regular n-gon;

(ii) the regular n-dimensional polytope represented by $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ is a convex configuration of congruent $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$'s, to be called *cells*, which fit together in such a way that each $(n-2)$-dimensional *face* belongs to two cells, and each $(n-3)$-dimensional *edge* to a_{n-1} cells.

(Thus the cube, having three squares meeting at each vertex, will be denoted by $\{4, 3\}$.)

This notation is extended in the natural way to include the regular lattices; $\{6, 3\}$, for example, refers to the hexagonal tiling of the plane.

The complete set of regular polytopes is given in Coxeter ([2], p. 292-295):

in E^2: $\{n\}$, with $n \geqslant 3$;
in E^3: $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 3\}$;
in E^4: $\{3, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$, $\{5, 3, 3\}$;
in E^n: with $n \geqslant 5$, $\{3_{n-1}\}$, $\{3_{n-2}, 4\}$, $\{4, 3_{n-2}\}$.