Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1985)
Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Varianten des Schwarzschen Lemma

Die Aufgabe 901 (El. Math., Vol. 38, Nr. 5, 1983) und deren Lösung (El. Math., Vol. 39, Nr. 5, 1984) haben mich auf einige Varianten des Schwarzschen Lemma gebracht, die ich nachfolgend beschreiben möchte.
Es bezeichne **D** die Kreisscheibe $\{|z| < 1\}$ und c eine komplexe Zahl vom Betrag 1; $f(z)$ ist stets eine holomorphe Funktion von **D** in **D**, die im Nullpunkt verschwindet und daher die Entwicklung $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ besitzt.
Das Schwarzsche Lemma besagt, dass $|f(z)| \leqq |z|$ in **D** und Gleichheit für ein $z_0 \neq 0$ nur eintreten kann, wenn $f(z) = cz$ ist. Durch Integration folgt daraus sofort $|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx| < 1$, aber die Schranke 1 ist nicht scharf. Nach der von P. von Siebenthal gestellten Aufgabe 901 ist ⅔ die genaue Schranke, die nur durch die Funktionen $f(z) = cz^2$ erreicht wird. In der von R. Mortini gegebenen Lösung ist nun (implizit) die folgende Variante des Schwarzschen Lemma enthalten.

I. Es ist
(1) $|f(z) + f(-z)| \leqq 2|z|^2$ in **D**,
und für ein $z_0 (\neq 0)$ kann Gleichheit nur eintreten, wenn $f(z) = cz^2$ ist.
Mit der dortigen Bezeichnungsweise ist nämlich

$$\frac{1}{2}\,|f(z) + f(-z)| = |w(z)| \leqq |z|^2 \quad \text{und} \quad f(z) = cz^2 + v(z),$$

falls für ein $z_0 (\neq 0)$ Gleichheit besteht. Gleich wie dort schliesst man, dass $v(z)$ die Konstante Null sein muss. Aus (1) folgt dann durch Integration sofort die Aussage in Aufgabe 901, dass

$$|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx| = |\int_0^1 (f(x) + f(-x))\,dx| \leqq 2\int_0^1 x^2\,dx = 2/3$$

ist und Gleichheit nur eintreten kann für $f(z) = cz^2$.
Dies ist aber nur der erste Schritt zu einer Reihe von Varianten. Zur Formulierung einer zweiten setzen wir

$$\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{3}.$$

Sie lautet dann:

II. Es ist

$$|f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z)| \leqq 3|z|^3 \quad \text{in} \quad \mathbf{D}\,,$$

und Gleichheit kann für ein $z_0(\neq 0)$ nur eintreten, wenn $f(z) = cz^3$ ist.
Der Beweis ist ganz analog zu jenem von Mortini. Wir setzen

$$g(z) = \frac{1}{3}\,(f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z))$$

und $u = f - g$. Dann ist $g(\varepsilon z) = g(z)$ und daher
(2) $u(z) + u(\varepsilon z) + u(\varepsilon^2 z) = 0$.
Die Funktion g bildet $\mathbf{D}$ in sich ab und hat in 0 die Entwicklung

$$g(z) = a_3 z^3 + a_6 z^6 + \cdots$$

Nach der Schlussweise beim Schwarzschen Lemma ist dann $|g(z)| \leqq |z|^3, z \in \mathbf{D}$, und Gleichheit kann für ein $z_0(\neq 0)$ nur eintreten, wenn $g(z) = cz^3$ und daher $f(z) = cz^3 + u(z)$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $u(z)$ identisch verschwindet. Wegen $|cz^3 + u(z)| = |f(z)| < 1$ und $|c| = 1$ folgt durch quadrieren, dass

$$|z|^6 + 2\,\mathfrak{Re}\,\{cz^3 \cdot u(z)\} + |u(z)|^2 < 1$$

ist und danach auch

$$|z|^6 + 2\,\mathfrak{Re}\,\{cz^3 \cdot u(\varepsilon z)\} + |u(\varepsilon z)|^2 < 1$$

und

$$|z|^6 + 2\,\mathfrak{Re}\,\{cz^3 \cdot u(\varepsilon^2 z)\} + |u(\varepsilon^2 z)|^2 < 1\,.$$

Addition und Berücksichtigung von (2) ergibt

$$3|z|^6 + |u(z)|^2 + |u(\varepsilon z)|^2 + |u(\varepsilon^2 z)|^2 < 3\,,$$

also $|u(z)|^2 < 3(1 - |z|^6)$. Gemäss dem Maximumprinzip muss u die Konstante Null und daher $f(z) = cz^3$ sein.
Nach diesem Beweis der Variante II ist für jedermann klar, wie man weitergehen könnte.

Albert Pfluger, Zürich

Didaktik und Elementarmathematik

Über ein Trapez aus merkwürdigen Punkten des Dreiecks

Ziel dieser Note ist es, auf einige bemerkenswerte Beziehungen zwischen gewissen merkwürdigen Punkten des ebenen Dreiecks hinzuweisen. Neben den vier klassischen merkwürdigen Punkten Schwerpunkt S, Umkreismittelpunkt M, Inkreismittelpunkt I und