Vermutungen über numerierbare Graphen

Autor(en): **Ringel, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39470

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

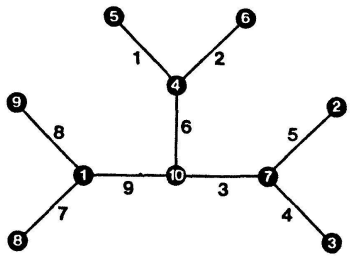
Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Vermutungen über numerierbare Graphen

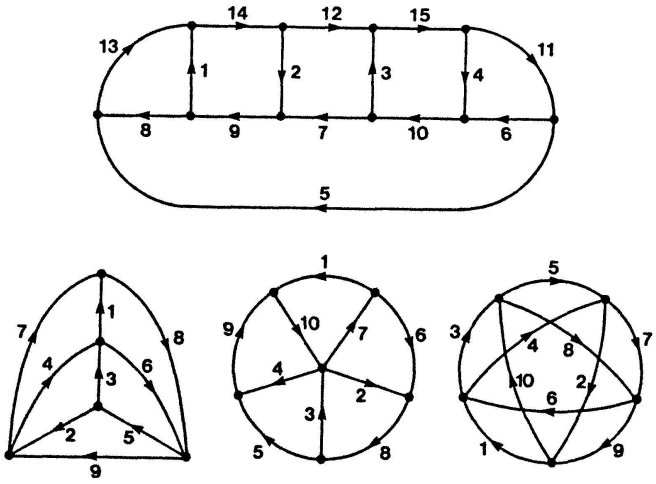
1. Einleitung

Es gibt viele Aufgaben, bei denen man die Ecken oder (und) die Kanten eines Graphen mit Nummern derart versehen soll, dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind. Falls hierbei innerhalb der verwendeten Menge der Nummern keinerlei Struktur eine Rolle spielt, so nennen wir diese Aufgabe ein Färbungsproblem, denn dann könnte man die Nummern auch durch Farben ersetzen.
Wenn jedoch mit den Nummern gerechnet, z. B. addiert wird, so ist das Wort Numerierung besser am Platze. In einer Tagung in Smolenice 1963 äusserte der Autor eine Aufgabe, die auf folgendes Numerierungsproblem hinausläuft.
Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph, der keine geschlossenen Wege (Kreise) enthält. Ein Baum B mit n Ecken hat stets genau $n-1$ Kanten. Wenn es in B möglich ist, die Ecken mit $1,2,\ldots,n$ und die Kanten mit $1,2,\ldots,n-1$ derart durchzunumerieren, dass die Nummer in jeder Kante k gleich der Differenz der Nummern der beiden mit k inzidierenden Ecken ist, so heisst der Baum B *graziös* (graceful). Figur 1 zeigt das Beispiel eines graziösen Baumes. *Es wird vermutet, dass jeder Baum graziös ist.* Nur für sehr spezielle Klassen von Bäumen wurde dies bisher bewiesen.



Figur 1

In dieser Note wollen wir ein anderes Numerierungsproblem für Graphen studieren. Es werden nur Graphen ohne mehrfache Kanten und ohne Schlingen betrachtet. Eine Kante in einem Graphen heisse *gerichtet,* wenn eine der beiden möglichen Richtungen (durch einen Pfeil) ausgewählt wurde. Eine Kante k mit den beiden Ecken A, B kann also



Figur 2

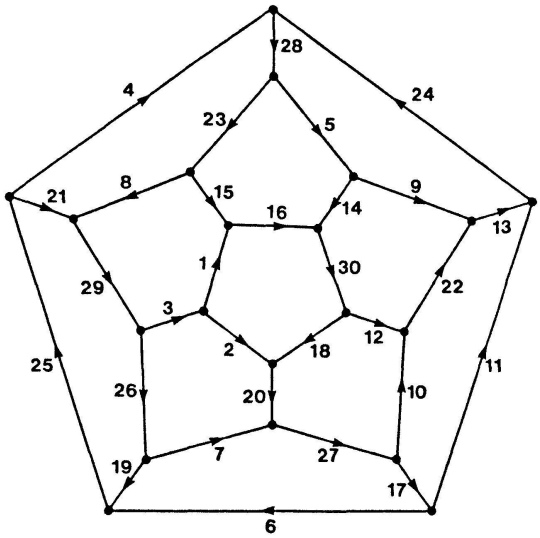
entweder von A nach B oder von B nach A gerichtet werden. Wir machen aufmerksam, dass alle folgenden Sätze und Vermutungen sich auf ungerichtete Graphen beziehen. Wir machen lediglich von der Möglichkeit Gebrauch, die Graphen zu richten.

Ein Graph G mit n Kanten heisse *rigoros,* wenn die Kanten so gerichtet und numeriert werden können, dass die Eigenschaften E 1, E 2 erfüllt sind.

E 1) *Jede der Nummern* $1, 2, \ldots, n$ *kommt genau einmal vor.*

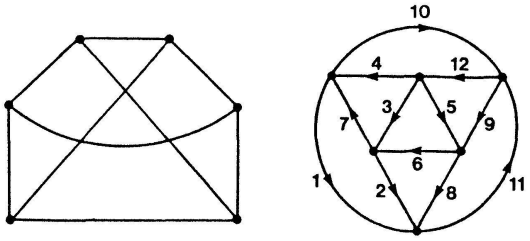
E 2) *In jeder Ecke E vom Grade* > 2 *ist die Summe der Nummern der nach E gerichteten Kanten gleich der Summe der von E gerichteten Kanten* (Kirchhoffsches Gesetz).

Figur 2 zeigt vier Beispiele von rigorosen Graphen. Auch der Dodekaeder-Graph ist rigoros. Die Numerierung nach Figur 3 wurde durch Computer ermittelt.



Figur 3

Im zweiten Buch [3] des Autors sind viele Beispiele von rigorosen Graphen angegeben, sie heissen dort «current graphs». Sie dienen einem bestimmten Zweck und haben alle die Form einer Leiter, wie z. B. der Graph in Figur 2 oben. Er hat vier Sprossen (vertikale Kanten); er lässt sich leicht auf n Sprossen verallgemeinern. Dieser «current graph» spielt in der Lösung des Heawoodschen Färbungsproblems auf Flächen höheren Geschlechts eine wichtige Rolle, jedenfalls in einem der zwölf Fälle im Beweis [3]. Neuerdings war dieser Graph die entscheidende Hilfe bei der Lösung des Headwoodschen Imperiumproblems [2].



Figur 4

Hier wollen wir die Frage stellen, welche Graphen die Rolle eines «current graph» spielen können, oder kurz, welche Graphen rigoros sind. Wie aus dem folgenden hervorgehen wird, sind der Baum in Figur 1 und der Graph in Figur 4 links z. B. nicht rigoros.

Der Graph, der aus n Ecken und allen $\binom{n}{2}$ Verbindungskanten zwischen den Ecken besteht, heisst der vollständige Graph K_n. Der Graph, der aus n roten Ecken und m blauen Ecken und allen nm Kanten, die je eine rote Ecke mit je einer blauen Ecke verbinden, besteht, heisst der vollständige paare Graph $K_{n,m}$.

2. Hamiltonsche Kreise

Ein Kreis in einem Graphen, der jede Ecke enthält, heisst ein Hamiltonscher Kreis. Ein Graph, bei dem jede Ecke denselben Grad r hat, heisst regulär vom Grade r. Wenn man in einen Graphen G genau t Hamiltonsche Kreise derart finden kann, dass jede Kante von G in genau einem dieser Hamiltonschen Kreise liegt, so sagen wir, G lässt sich in t Hamiltonsche Kreise zerlegen. Natürlich ist dann G regulär vom Grade $2t$. Der K_5 z. B. lässt sich in zwei Hamiltonsche Kreise zerlegen.

Satz 1. *Es sei G ein Graph mit n Ecken, der sich in t Hamiltonsche Kreise zerlegen lässt ($t \neq 1$). Falls das Produkt $t(n-1)$ eine gerade Zahl ist, so ist G rigoros.*

Beweis: Es sei G ein Graph mit n Ecken, der sich in t Hamiltonsche Kreise $H_1, H_2, \ldots, H_t$ zerlegen lässt. Da jeder Kreis H_i aus n Kanten besteht, besitzt G genau tn Kanten. Wir wählen in jedem H_i eine Durchlaufungsrichtung und geben dann jeder Kante in H_i genau diese Richtung ($i = 1, 2, \ldots, t$). Damit sind alle Kanten in G gerichtet. Bei der Verteilung der Nummern wollen wir einige Fälle unterscheiden; es wird uns in jedem Fall gelingen, die Kanten von H_i mit Nummern $\equiv i \pmod t$ zu versehen. Es sei in G eine Ecke E fest gewählt.

A) Es sei $t = 2$. Wir durchlaufen H_1 in der gewählten Richtung, beginnend mit E, und geben dabei den Kanten der Reihe nach die Nummern $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Ebenso durchlaufen wir H_2, beginnend mit E, und geben den Kanten der Reihe nach die Nummern $2n$, $2n-2, \ldots, 6, 4, 2$. Dann ist leicht zu sehen, dass die Eigenschaften E 1 und E 2 erfüllt sind. Diese Methode lässt sich leicht verallgemeinern für gerade Zahlen t.

B) Es sei t eine gerade Zahl. Wir durchlaufen jeden Kreis H_i, beginnend mit E in der gewählten Richtung, und geben den Kanten von H_i die Nummern nach folgendem Schema:

$$
\begin{array}{llllll}
1, & t+1, 2t+1, & \ldots & (n-1)t+1 & & (H_1) \\
3, & t+3, 2t+3, & \ldots & (n-1)t+3 & & (H_3) \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\
t-1, 2t-1, 3t-1, & & \ldots & & nt-1 & (H_{t-1}) \\
(n-1)t+2, & \cdot & \ldots & 2t+2, & t+2, 2 & (H_2) \\
(n-1)t+4, & \cdot & \ldots & 2t+4, & t+4, 4 & (H_4) \\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\
nt, & \cdot & \ldots & 3t, & 2t, t & (H_t)
\end{array}
$$

Man beachte, dass die Nummern in den H_i für ungerades i jedesmal um t zunehmen und für gerades i jedesmal um t abnehmen. Genau das garantiert Eigenschaft E 2 für alle

Ecken $\neq E$. Es ist leicht, Eigenschaft E2 auch für die Ecke E zu verifizieren; aber es ist eigentlich nicht nötig. Denn wenn für alle anderen Ecken in G kein positiver oder negativer Überschuss vorhanden ist, dann muss auch in E der Überschuss gleich Null sein.

C) Es sei $t = 3$. Dann ist nach Voraussetzung n ungerade. Wir wählen in den Hamiltonschen Kreisen H_i die folgende Numerierung, beginnend in der Ecke E:

$$\begin{array}{lll} 3n,\ldots 15,9,3; & 3n-3,\ldots 18,12,6 & (H_3) \\ 1,4,7,\ldots\ 3k+1; & 3k+4,\ldots\ldots\ 3n-2 & (H_1) \\ 3j+2,\ldots\ldots\ 3n-1; & 2,5,8,\ldots\ 3j-1 & (H_2) \end{array}$$

Die Endecke von der Kante mit der Nummer 3 wollen wir mit F bezeichnen. In F lassen wir dann die Nummern für H_2 mit $2,5,8,\ldots$ beginnen.

In den Ecken $\neq E$ und F nehmen die Nummern in H_3 jedesmal um 6 ab, während sie in H_1 und H_2 jedesmal um 3 zunehmen, also ist hier E2 erfüllt. Für E oder F muss die Eigenschaft E2 gesondert geprüft werden, etwa für F: Es laufen die Nummern 3, $3k+1$, $3n-1$ nach F und die Nummern $3n-3$, $3k+4$, 2 von F. Hier ist also E2 erfüllt und daher auch für die Ecke E.

D) Jetzt sei t ungerade und $\geqslant 3$. Die Lösung wird den obigen Fall C einschliessen. Wir kombinieren die Idee von B mit der von C. Wieder ist n ungerade. Wir wählen die Numerierung wie folgt:

$$\begin{array}{ll} nt,\ldots,5t,3t,t;nt-t,\ldots,6t,4t,2t & (H_t) \\ 1,t+1,2t+1,\ldots\ldots\ldots\ldots,nt-t+1 & (H_1) \\ \ldots\ldots\ldots nt-t+2;2,t+2,2t+2,\ldots\ldots & (H_2) \end{array}$$

Die übrige Numerierung wird genau wie unter B für $H_3, H_5, \ldots$ mit jeweils um t zunehmenden Nummern, und für $H_4, H_6, \ldots$ mit jeweils um t abnehmenden Nummern gewählt. Auch hier beginnen wir in der Ecke E und mit der Nummer i im Kreise $H_i (i = 3,4,5,\ldots,t-1)$. Die Eigenschaften E1 und E2 sind dann leicht zu verifizieren.

3. Spezielle Graphen

Für einige spezielle Graphenklassen sind Zerlegungen in Hamiltonsche Kreise bekannt. Das gibt uns Gelegenheit, Satz 1 anzuwenden.

Satz 2. *Wenn n ungerade und $n \geqslant 5$ ist, so ist der vollständige Graph K_n rigoros.*

Beweis: Es ist bekannt, dass für ungerade n der K_n sich in $t = (n-1)/2$ Hamiltonsche Kreise zerlegen lässt [1, 4]. Da $n-1$ gerade ist, ist Satz 1 direkt anwendbar. Es ist auch leicht zu sehen, dass K_4 rigoros ist.

Vermutung 1. *Auch für gerades n ist K_n rigoros.*

Ein *paarer* Graph ist ein Graph, bei dem jeder Kreis eine gerade Anzahl von Kanten hat.

Lemma 1. *Wenn in einem paaren Graphen H jede Ecke einen geraden Grad hat, so ist in H die Anzahl der Kanten gerade.*

Beweis: Es ist bekannt, dass die Ecken in einem paaren Graphen mit zwei Farben, etwa Rot und Blau, derart gefärbt werden können, dass jede Kante mit einer blauen und mit einer roten Ecke inzidiert. Es sei H so gefärbt. Dann ist die Anzahl der Kanten in H gleich der Summe der Grade aller roten Ecken, die ja alle gerade sind.

Satz 3. *Wenn n gerade ist, so lässt sich der Graph $K_{n,n}$ in $n/2$ Hamiltonsche Linien zerlegen.*

Dieser Satz ist sicher irgendwo in der Literatur bewiesen. Er lässt sich auch so formulieren: Es ist möglich, n Damen und n Herren an $n/2$ Abenden um einen runden Tisch mit $2n$ Plätzen so zu plazieren, dass am Ende jeder Herr neben jeder Dame gesessen hat. Hier ist die Lösung: Die Namen der Herren seien $1, 2, \ldots, n$, und die der Damen seien $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \boldsymbol{n}$. Dann gibt das folgende Schema die gewünschten Sitzordnungen. Jede Zeile entspricht einem Abend und ist zyklisch zu lesen.

$$\begin{array}{rl}
1, \mathbf{1}, 2, \mathbf{2}, 3, \mathbf{3}, \ldots\ldots & n, \boldsymbol{n} \\
3, \mathbf{1}, 4, \mathbf{2}, 5, \mathbf{3}, \ldots\ldots & 2, \boldsymbol{n} \\
5, \mathbf{1}, 6, \mathbf{2}, 7, \mathbf{3}, \ldots\ldots & 4, \boldsymbol{n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
n-1, \boldsymbol{1}, n, \boldsymbol{2}, 1, \boldsymbol{3}, \ldots\ldots n-2, & \boldsymbol{n}
\end{array}$$

Satz 4. *Wenn $n \neq 1$ ungerade ist, so ist der Graph $K_{n,n}$ nicht rigoros. Wenn $n \equiv 0 \pmod 4$, so ist $K_{n,n}$ rigoros.*

Vermutung 2. *Auch für* $n \equiv 2 \pmod 4$ *ist $K_{n,n}$ rigoros.*

Beweis zu Satz 4: Wir nehmen an, n sei ungerade und $K_{n,n}$ rigoros. Es sei H der Teilgraph, der aus allen Kanten von $K_{n,n}$ erzeugt wird, die eine ungerade Nummer tragen. Der Grad jeder Ecke in H ist dann gerade. Nach Lemma 1 hat H eine gerade Anzahl von Kanten. Unter den Nummern 1 bis n^2 ist aber eine ungerade Anzahl ungerader Nummern, daher kann $K_{n,n}$ nicht rigoros sein. – Wenn $n \equiv 0 \pmod 4$, so ist nach Satz 3 und Satz 1 der $K_{n,n}$ rigoros.

Mit Hilfe von Lemma 1 kann man genauso auch zeigen, dass $K_{m,n}$ nicht rigoros ist, falls $mn \equiv 1 \pmod 4$ ist.

Auch der reguläre vollständige tripartite Graph $K_{n,n,n}$ ist wahrscheinlich in n Hamiltonsche Kreise zerlegbar für jedes $n \geqslant 3$ und wäre somit nach Satz 1 rigoros. Der Verfasser konnte dies jedoch bis jetzt nur beweisen, wenn n eine Primzahl ist. Übrigens, der Oktaeder-Graph ist isomorph zu $K_{2,2,2}$ und lässt sich nicht in zwei Hamiltonsche Kreise zerlegen; er ist aber trotzdem rigoros wie Figur 4 rechts zeigt. Der 3dimensionale Würfelgraph Q_3 ist rigoros, wie man durch Probieren feststellen kann. Es empfiehlt sich hierbei, zuerst zu überlegen, wo die ungeraden Nummern stehen sollen. Die Kanten mit den ungeraden Nummern müssen nämlich ein Sechseck bilden. Beim Ikosaeder-Graph wissen wir noch nicht, ob er rigoros ist; ein Kandidat für den Computer.

Es ist bekannt, dass der n-dimensionale Würfelgraph Q_n sich in lauter Hamiltonsche Kreise zerlegen lässt [4], wenn n eine Zweierpotenz ist. Die Anzahl der Ecken in Q_n ist 2^n. Als Anwendung von Satz 1 ergibt sich dann

Satz 5. *Wenn n eine Zweierpotenz und $n \geqslant 4$ ist, so ist der n-dimensionale Würfelgraph rigoros.*

Vermutung 3. *Auch für alle anderen $n \neq 2$ ist Q_n rigoros.*

4. Planare Graphen

Ein Graph heisst planar, wenn er sich ohne Überschneidung der Kanten in die Ebene oder Kugel einbetten lässt. Er heisst planar gesättigt, wenn es nicht möglich ist, zwei Ecken durch eine neue Kante zu verbinden, ohne die Planarität zu zerstören. Ein planar gesättigter Graph zerlegt die Kugel in lauter Dreiecke. Ein Beispiel ist der Graph links unten in Figur 2.

Vermutung 4. *Ein planar gesättigter Graph mit mehr als drei Ecken ist rigoros.*
Eine Ecke vom Grade 1 in einem Graphen wollen wir Endecke nennen. Ein Baum z. B. hat mindestens zwei Endecken. Ein Weg in einem Baum, der zwei Endecken verbindet, heisst ein Längstweg, weil er nicht mehr verlängert werden kann.

Satz 6. *Es sei B ein Baum mit n Kanten ohne Ecken vom Grade 2, und jeder Längstweg in B hat gerade Länge. Wenn $n \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$ ist, so ist B nicht rigoros.*

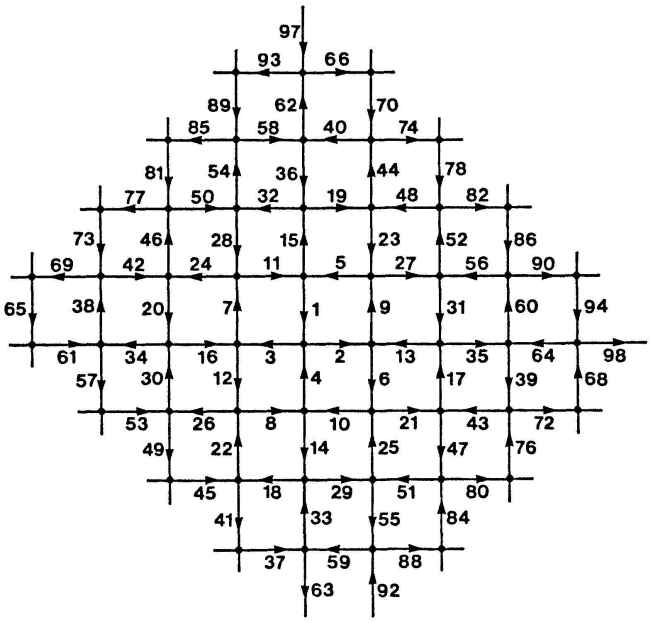
Beweis: Angenommen, ein solcher Baum B sei rigoros. Es sei H der Teilgraph, der nur aus den Kanten erzeugt wird, die eine ungerade Nummer erhalten haben. In H ist dann jede Ecke vom Grade 1 oder eine gerade Zahl. H lässt sich in lauter Längstwege zerlegen. Daher hat H eine gerade Zahl von Kanten. Jedoch ist die Zahl der zu verbrauchenden ungeraden Nummern von 1 bis n nicht gerade, sondern ungerade.
Der Graph $K_{1,n}$ wird auch der n-Stern genannt.

Satz 7. *Der n-Stern $K_{1,n}$ ist dann und nur dann rigoros, wenn $n \equiv 0$ oder $3 \pmod 4$ ist ($n \neq 1$).*

Beweis: In $K_{1,n}$ ist jeder Längstweg von der Länge 2, also ist er nach Satz 6 nicht rigoros, wenn $n \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$ ist. Der Rest des Beweises sei dem Leser überlassen.

Vermutung 5. *Es sei B ein Baum mit n Kanten und ohne Ecken vom Grade 2. Wenn $n \equiv 0$ oder $3 \pmod 4$ ist, so ist B rigoros. Wenn $n \equiv 1$ oder $2 \pmod 4$ ist und in B existiert ein ungerader Längstweg, so ist B rigoros.*
Ein kubischer Baum ist ein Baum mit nur Ecken vom Grade 1 oder 3. Die Anzahl n der Kanten in einem kubischen Baum B ist immer ungerade. Wenn jeder Längstweg in B gerade Länge hat, so ist $n \equiv 3 \pmod 6$. Daher bekommen Satz 6 und Vermutung 5 für kubische Bäume die folgende einfache Form:

Satz 8. *Es sei B ein kubischer Baum mit n Kanten. Wenn $n \equiv 9 \pmod{12}$ ist und jeder Längstweg in B gerade Länge hat, dann ist B nicht rigoros.*



Figur 5

Vermutung 6. *Alle anderen kubischen Bäume sind rigoros.*

Auch für nicht zusammenhängende oder unendliche Graphen ist die Frage nach ihrer Rigorosität interessant. Das zweidimensionale Gitter ist nach Figur 5 rigoros. Das Bildungsgesetz kann man leicht erkennen, wenn man, vier Buntstifte benutzend, die Kanten mit den Nummern $\equiv i \pmod 4$ mit dem i-ten Buntstift nachzieht ($i = 1, 2, 3, 4$).

G. Ringel, Santa Cruz, USA

LITERATURVERZEICHNIS

1 E. Lucas: Les rondes enfantines, in: Récréations Mathématiques, Band 2, 2. Aufl. Paris 1894.
2 B. Jackson und G. Ringel: Solution of Headwood's empire problem in the plane. J. reine angew. Math. *347*, 146–153 (1984).
3 G. Ringel: Map Color Theorem. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.
4 G. Ringel: Über drei kombinatorische Probleme am n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *20*, 10–19 (1955).

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/060068-07$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 923. Für die Umfänge der Dreiecke mit den Seiten $(y + z)/(1 + yz)$, $(z + x)/(1 + zx)$ und $(x + y)/(1 + xy)$, wobei $x = \tan(A/4)$, $y = \tan(B/4)$, $z = \tan(C/4)$ und $A + B + C = \pi$ (vgl. Aufgabe 907, El. Math. *40* (1985)), sind bestmögliche untere und obere Schranken gesucht.

Hj. Stocker, Wädenswil