Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels

Autor(en): **Mascioni, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **41 (1986)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39473

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aus (5.4) folgt schliesslich unter Beachtung von (8.1) für die Abhängigkeit $p \to q$ die explizite Darstellung

$$q \equiv f(p) = 2a \sin^2\omega \frac{(a^2 - p^2)(a \cot\alpha - p)}{(b^2 - p^2 \sin^2\omega)(a - p \sin\omega)}. \tag{8.3}$$

Bei dem in §7 gefundenen wackeligen Sechshorn, gekennzeichnet durch $2\alpha = \omega = 60°$ und $a : b = 1 : \sqrt{3}$, wird die Mittelstellung – in Einklang mit (6.2) – für $p_0 = q_0 = 2r_0 = (\sqrt{3} - 1)a$ eingenommen.

Die $2n$-Hörner mit $n > 3$ erweisen sich hingegen unter der Annahme (8.1) als nicht wackelig, wie der Verlauf der Diagrammkurven $q = f(p)$ und $p = f(q)$ lehrt, die einander im Punkt $p_0 = q_0$ nicht berühren, sondern unter einem nichtverschwindenden Winkel schneiden.

W. Wunderlich, Wien, und C. Schwabe, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Blaschke: Wackelige Achtflache. Math. Z. *6*, 85–93 (1920).
2 R. Connelly: A flexible sphere. Math. Intelligencer *3*, 130–131 (1978).
3 M. Dehn: Über die Starrheit konvexer Polyeder. Math. Ann. *77*, 466–473 (1916).
4 M. Goldberg: Unstable polyhedral structures. Math. Mag. *51*, 165–170 (1978).
5 H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante. Sber. bayer. Akad. Wiss. *1920*, 197–227.
6 E. Steinitz und H. Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin 1934.
7 B. Wegner: On the projective invariance of shaky structures in euclidean space. Acta mech. *53*, 163–171 (1984).
8 W. Wunderlich: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache. Elem. Math. *20*, 25–32 (1965). – Snapping und shaky antiprisms. Math. Mag. *52*, 235–236 (1979). – Kipp-Ikosaeder I, II. Elem. Math. *36*, 153–158 (1981); *37*, 84–89 (1982).
9 W. Wunderlich: Neue Wackelikosaeder. Anz. öst. Akad. Wiss. *117*, 28–33 (1980). – Wackelige Doppelpyramiden. Anz. öst. Akad. Wiss. *117*, 82–87 (1980). – Wackelikosaeder. Geom. Dedicata *11*, 137–146 (1981). – Wackeldodekaeder. Elem. Math. *37*, 153–163 (1982).
10 W. Wunderlich: Zur projektiven Invarianz von Wackelstrukturen. Z. angew. Math. Mech. *60*, 703–708 (1980). – Projective invariance of shaky structures. Acta mech. *42*, 171–181 (1982).

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/060088-11$1.50 + 0.20/0

Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels

Im Inneren des Dreiecks $A_1A_2A_3$ mit Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gibt es immer einen Punkt Ω derart, dass $< \Omega A_1 A_2 = < \Omega A_2 A_3 = < \Omega A_3 A_1 =: \omega$. Der Brocardsche Winkel ω ist dadurch eindeutig bestimmt und genügt der Gleichung (vgl. [4], S. 58–60)

$$\cot\omega = \Sigma \cot\alpha_i. \tag{1}$$

Gegeben positive Zahlen x_1, x_2, x_3, definieren wir, für $r \in \mathbf{R}$,

$$M_r(x) := \begin{cases} (\Sigma x_i^r/3)^{1/r}, & r \neq 0 \\ (\Pi x_i)^{1/3}, & r = 0. \end{cases}$$

Die Mittelwertfunktion $r \to M_r(x)$ ist bekanntlich isoton ([3], 2.14.2). Um Wiederholungen zu vermeiden, sei die Bemerkung vorausgeschickt, dass alle Ungleichungen in dieser Note strikt mit Ausnahme des gleichseitigen Falles sind.
1963 konnte Yff [1] nur behaupten, dass

$$M_{-\infty}(\alpha) \leq 2\omega \leq M_1(\alpha) = \frac{\pi}{3}$$

($M_{-\infty}(\alpha)$ ist der kleinste Winkel des Dreiecks). Er vermutete aber, dass

$$2\omega \leq M_0(\alpha) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/3},$$

und dies ist elf Jahre später von Abi-Khuzam in dieser Zeitschrift bewiesen worden [2]. Nach einer nochmaligen Pause von elf Jahren ist es mir gelungen, die Verschärfung

$$2\omega \leq M_{-1}(\alpha) = 3(\Sigma 1/\alpha_i)^{-1} \tag{2}$$

zu beweisen. Weiter bleibt meine Vermutung

$$M_{-2}(\alpha) \leq 2\omega$$

noch unbewiesen (und damit ist natürlich die Frage nach der besten Abschätzung noch ungelöst).

Hilfssatz. (2) *ist vom gleichschenkligen Dreieck mit Winkeln* $\alpha, \alpha, \pi - 2\alpha \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ *erfüllt.*

Beweis: Sei $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nach (1) gilt

$$\cot\omega = 2\cot\alpha + \cot(\pi - 2\alpha) = 2/\sin(2\alpha) + \cot(2\alpha),$$

und nach der Substitution $x := 2\alpha$ $(0 < x < \pi)$ wird (2) zu

$$g(x) := \frac{x(\pi - x)}{2(4\pi/3 - x)} - \operatorname{arcot}\left(\frac{2}{\sin x} + \cot x\right) \geq 0,$$

mit

$$g'(x) = \frac{3/2}{4\cos x + 5} - \frac{2\pi^2}{9}\left(\frac{4\pi}{3} - x\right)^{-2}.$$

$g'(x) = 0$ ist also äquivalent zu

$$\left(\frac{4\pi}{3} - x\right)^2 = \frac{4\pi^2}{27}(4\cos x + 5),$$

was (nach einfachen Konvexitätsbetrachtungen) genau drei Lösungen in $(0, \pi)$ hat (die mittlere Lösung ist $2\pi/3$). Die Behauptung folgt somit aus

$$g(0^+) = g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = g(\pi^-) = 0$$

und

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0, \qquad g\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0,$$

was man direkt verifizieren kann.

Lemma 1. *Für* $0 < x \leq \pi$ *gilt*

$$3\sin x - x\cos x - 2x < 0.$$

Beweis (A. Thom): Für alle $x > 0$ gilt:

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - x\left(3 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) < 0, \text{für } 0 < x \leq \pi,$$

das heisst, dass

$$\frac{x^5}{6!}(x^2 - 12) < 0, \quad \text{für} \quad 0 < x \leq \pi,$$

was wegen $\pi^2 < 12$ tatsächlich der Fall ist.

Lemma 2. *Die Funktion* $f(x) := \left(\frac{x}{\sin x}\right)^3 \cos x$ *ist strikt monoton fallend in* $[0, \pi)$ $(f(0) := 1)$.

Beweis: Man hat, für $0 < x < \pi$,

$$f'(x) = \frac{x^2}{2\sin^4 x}[3\sin(2x) - 2x\cos(2x) - 4x] =: \frac{x^2}{2\sin^4 x} \cdot s(x).$$

Zu zeigen ist, dass $s(x) < 0$ für $0 < x < \pi$. Dies folgt aber sofort aus Lemma 1 falls $x \in (0, \pi/2]$. Falls $x \in [\pi/2, \pi)$ ist die Ungleichung trivial.

Beweis von (2): Wir wenden die Methode von Lagrange an die Funktion

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \omega(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \Sigma \frac{1}{\alpha_i} := \operatorname{arcot}(\Sigma \cot \alpha_i) \cdot \Sigma \frac{1}{\alpha_i} \cdot$$

Die Nebenbedingung $\Sigma \alpha_i = \pi$ führt dann zum System

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha_k} = \dfrac{(\Sigma 1/\alpha_i) \sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha_k} - \dfrac{\omega}{\alpha_k^2} = \lambda, \qquad k = 1, 2, 3. \\ \Sigma \alpha_i = \pi \end{cases} \tag{4}$$

Sei $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ eine Lösung von (4) und setze $A := \left(\Sigma \dfrac{1}{\alpha_i}\right) \sin^2 \omega$, $B := \omega$. Dann nimmt die Funktion

$$h(x) := \frac{A}{\sin^2 x} - \frac{B}{x^2}$$

an den Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ denselben Wert an. Lemma 2 impliziert, dass

$$h'(x) = \frac{2A}{x^3} \left(\frac{B}{A} - \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \cos x \right)$$

höchstens eine Nullstelle in $(0, \pi)$ besitzt. Dies impliziert aber, dass die Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ notwendigerweise gleichschenklig ist. Der Hilfssatz endet somit den Beweis (die Betrachtung der «ausgearteten Dreiecke» ist trivial).

V. Mascioni
Mathematik-Departement, ETH Zürich

VERDANKUNG

Ich danke Herrn Prof. J. Steinig für viele wertvolle Verbesserungsvorschläge.

LITERATURVERZEICHNIS

1 P. Yff: An analogue of the Brocard points. Am. Math. Monthly *70*, 495–501 (1963).
2 F. Abi-Khuzam: Proof of Yff's conjecture on the Brocard angle of a triangle. El. Math. *29*, 141–142 (1974).
3 D.S. Mitrinović: Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin 1970.
4 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

© 1986 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/86/060098-04$1.50 + 0.20/0