Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1986)
Heft: 6

Artikel: Zerlegungsähnlichkeit von Polygonen
Autor: Hertel, Eike
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39478

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 41 Nr. 6 Seiten 139–170 Basel, 10. November 1986

Zerlegungsähnlichkeit von Polygonen

Vor annähernd zwanzig Jahren hat H. E. Debrunner [2] den bemerkenswerten Satz bewiesen, dass zu zwei beliebigen Polyedern des n-dimensionalen euklidischen Raumes stets solche Zerlegungen in endlich viele Teilpolyeder existieren, dass die Teile des einen Polyeders paarweise ähnlich und ähnlich gelegen sind zu denen des anderen (vgl. auch [4] und [8]). Ch. Meier [6] konnte zeigen, dass diese «Zerlegungsparadoxie» bereits bezüglich solcher Untergruppen der Ähnlichkeitsgruppe auftritt, die von den Translationen und einer beliebigen echten Dilatation erzeugt werden. Es zeigt sich nun, dass dieser überraschende Satz der Polyedergeometrie im Fall der Dimension $n = 2$ unter Ausnutzung der vollen Ähnlichkeitsgruppe einen konstruktiven und schulgeometrisch-elementaren Beweis gestattet. Es erscheint deshalb wünschenswert, dass dieser geometrisch schöne und didaktisch wertvolle Gegenstand Eingang findet in den Geometrieunterricht der Schule zur Ähnlichkeitslehre. Die vorliegende Note soll der Popularisierung dieses Gedankens dienen. Darüber hinaus gestattet der vorgestellte Beweis eine gute universelle Abschätzung für die Anzahl der Teile, die zur Realisierung der Zerlegungsähnlichkeit zweier Polygone erforderlich sind, im Gegensatz zu den groben bzw. speziellen Abschätzungen für die minimale Teilezahl bei der klassischen Zerlegungsgleichheit von Polygonen (vgl. [3], [5]). Das beste bekannte, aber sehr spezielle, Ergebnis in dieser Richtung ist wohl der Satz, dass die (klassische) Zerlegungsgleichheit eines Quadrates und eines inhaltsgleichen regulären Dreiecks stets mit vier und nicht weniger (konvexen) Teilen realisiert werden kann ([3], [1]).
Zunächst sei an einige Grundbegriffe erinnert. Ein Polygon $\mathfrak{C}$ heisst *Summe* der Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bzw. in die Teilpolygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *zerlegt* ($\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$), wenn $\mathfrak{C}$ die Vereinigung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ höchstens Randelemente gemeinsam haben:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} :\Leftrightarrow \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \ \& \ \operatorname{int}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) = \phi .$$

Zwei Polygone heissen *ähnlich* ($\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$), wenn eine Ähnlichkeitsabbildung α existiert mit $\alpha(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$. Ferner heissen zwei Polygone $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *zerlegungsähnlich* ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$), wenn sie sich in die gleiche Anzahl paarweise ähnlicher Teilpolygone zerlegen lassen:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} :\Leftrightarrow \mathfrak{A} = \sum_1^n \mathfrak{A}_i \ \& \ \mathfrak{B} = \sum_1^n \mathfrak{B}_i \ \& \ \mathfrak{A}_i \simeq \mathfrak{B}_i \quad (i = 1, \ldots, n) . \tag{1}$$

Schliesslich werde unter dem *Grad* grd $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der Zerlegungsähnlichkeit zweier Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Minimalzahl der Polygonpaare verstanden, die zur Realisierung ihrer Zerlegungsähnlichkeit erforderlich sind:

$$\operatorname{grd}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \min\{n\colon (1)\}.$$

Nun kann eine erste überraschende Aussage formuliert werden in folgendem

Hilfssatz 1. *Zwei beliebige Rechtecke sind stets zerlegungsähnlich von höchstens zweitem Grade.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{R}_1 = R(a,b)$ und $\mathfrak{R}_2 = R(c,d)$ Rechtecke mit den Seitenlängen a, b $(a \leq b)$ bzw. c, d $(c \leq d)$ und etwa $ad < bc$. Der Fall ähnlicher Rechtecke, $ad = cb$ und grd $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2) = 1$, sei also ausgeschlossen. Dann wird $\mathfrak{R}_1$ zerlegt in zwei Teilrechtecke

$$\mathfrak{R}_1 = R(a, b-x) + R(x, a)$$

mit

$$x := (ac + bd - \sqrt{(bd-ac)^2 + 4a^2d^2})/2d.$$

Dabei ist x positive Wurzel der Gleichung

$$dx^2 - (ac+bd)x + abc - a^2d = 0, \tag{2}$$

und es gilt $x < a$ und $x < b - a$. Geeignete Ähnlichkeitsabbildungen α_1 und α_2 mit den Dilatationskoeffizienten $t_1 := d/(b-x)$ bzw. $t_2 := d/a$ überführen die Teilrechtecke von $\mathfrak{R}_1$ in entsprechende Teile von $\mathfrak{R}_2$:

$$\alpha_1(R(a, b-x)) = R(ad/(b-x), d),$$

$$\alpha_2(R(x,a)) = R(dx/a, d).$$

Zum Nachweis, dass die erhaltenen zwei Rechtecke eine Zerlegung von $\mathfrak{R}_2$ liefern, muss nur noch

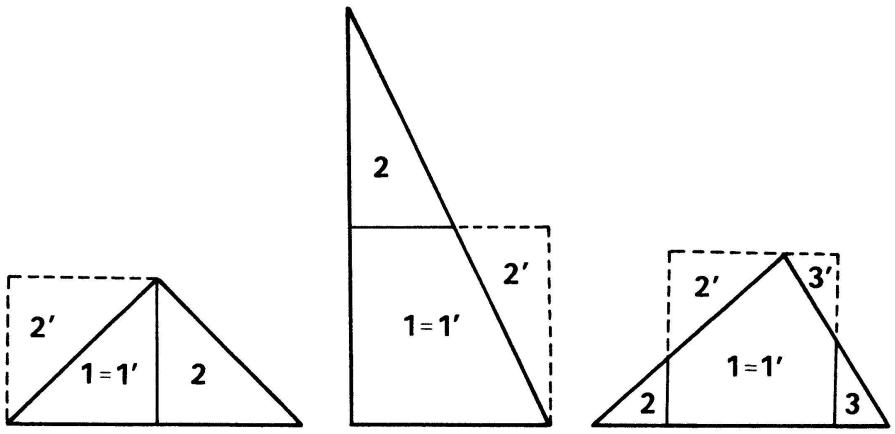
$$dx/a + ad/(b-x) = c$$

nachgewiesen werden, was aber sofort aus (2) folgt.
In [2] wird die Realisierung der Zerlegungsähnlichkeit für ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat durch 6 Teile, in [6] eine solche für beliebiges Dreieck und Quadrat durch 5 Teile angegeben. Diese Aussagen lassen sich verschärfen zu folgendem

Hilfssatz 2. *Jedes Dreieck ist zerlegungsähnlich zu jedem Quadrat. Ist $\mathfrak{D}_r$ ein rechtwinkliges Dreieck, $\mathfrak{D}$ ein Dreieck ohne rechten Winkel und $\mathfrak{Q}$ ein beliebiges Quadrat, so gilt*

$$\operatorname{grd}(\mathfrak{D}_r, \mathfrak{Q}) = 2 \quad \textit{bzw.} \quad \operatorname{grd}(\mathfrak{D}, \mathfrak{Q}) = 3.$$

Der elementare Beweis dieser Aussage ist unmittelbar aus der Figur 1 abzulesen.



Figur 1.

Als Korollar zu diesem Hilfssatz ergibt sich aus der Tatsache, dass jedes Polygon in Dreiecke zerlegt werden kann, dass zwei Quadrate stets ähnlich sind und aus der Transitivität der Relation $\sim$ sofort der Satz von Debrunner für Polygone. Um jedoch zu der angekündigten scharfen Anzahlabschätzung zu kommen, wird der Beweis mit Hilfe einer von Ch. Richter [7] gefundenen Aussage geführt, die formuliert wird in folgendem

Hilfssatz 3. *Zwei beliebige Dreiecke sind stets zerlegungsähnlich von höchstens drittem Grade.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{D}_i = A_i B_i C_i$ $(i = 1, 2)$ zwei beliebige Dreiecke mit den Seitenlängenbeziehungen

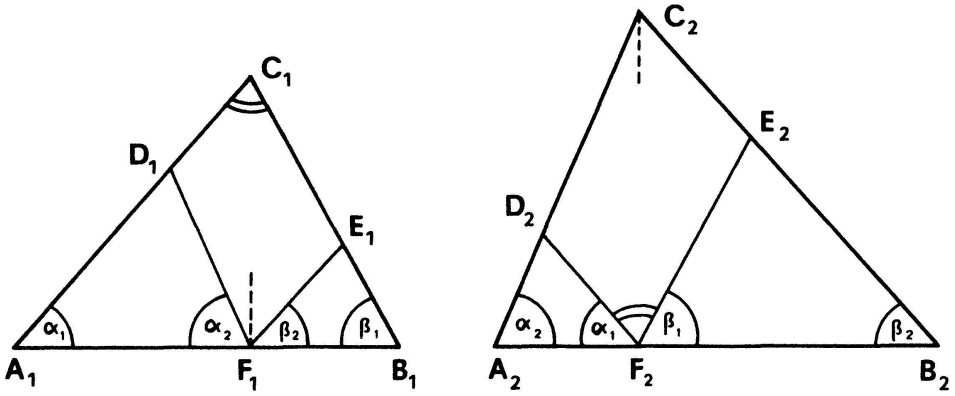
$$|B_i C_i| \leq |A_i C_i| \leq |A_i B_i|$$

und den Winkelgrößen

$$\alpha_i = |\sphericalangle (B_i A_i C_i)| \quad \text{und} \quad \beta_i = |\sphericalangle (A_i B_i C_i)| \qquad (i = 1, 2),$$

so dass $\alpha_i, \beta_i < \pi/2$ gilt. Dann liegen die Fusspunkte F_i der Höhen durch C_i im Inneren der Seiten $A_i B_i$ $(i = 1, 2)$. Wird nun in F_1 ein Winkel $\sphericalangle (A_1 F_1 D_1)$ der Grösse α_2 und ein Winkel $\sphericalangle (B_1 F_1 E_1)$ der Grösse β_2 angetragen und analog in F_2 ein Winkel $\sphericalangle (A_2 F_2 D_2)$ der Grösse α_1 bzw. ein Winkel $\sphericalangle (B_2 F_2 E_2)$ der Grösse β_1 (vgl. Figur 2), so sind die Dreiecke $\mathfrak{D}_i$ zerlegt in jeweils zwei Dreiecke $\mathfrak{T}_i = A_i F_i D_i$ und $\mathfrak{S}_i = B_i F_i E_i$ und ein Viereck $\mathfrak{V}_i = F_i E_i C_i D_i$:

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{V}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{V}_2 .$$



Figur 2.

Nach Konstruktion gilt dann wegen der Kongruenz entsprechender Winkel

$$\mathfrak{T}_1 \simeq \mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{S}_1 \simeq \mathfrak{S}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1 \simeq \mathfrak{B}_2,$$

also auch $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$ und grd $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \leq 3$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.
Nun kann die Hauptaussage formuliert werden durch folgenden

Satz. *Zwei beliebige Polygone sind stets zerlegungsähnlich. Ist $\mathfrak{P}_n$ ein konvexes n-Eck und $\mathfrak{P}_m$ ein konvexes m-Eck mit $n \geq m$, so gilt*

$$\text{grd}\,(\mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_m) \leq 3\,(n-2)\,. \tag{3}$$

Beweis: Zwei beliebige Polygone können in die gleiche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden. Mit Anwendung des Hilfssatzes 3 auf Paare dieser Teildreiecke folgt die erste Aussage des Satzes. Jedes konvexe n-Eck kann insbesondere in $n-2$ Dreiecke und ein konvexes m-Eck mit $m \leq n$ ebenfalls in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden. Diese Dreiecke sind nach Hilfssatz 3 paarweise zerlegungsähnlich von höchstens drittem Grade. Insgesamt gilt also die Ungleichung (3), womit der Satz bereits vollständig bewiesen ist.
Abschliessend seien noch drei Anmerkungen notiert:
1. Die Abschätzung (3) kann in dieser universellen Form nicht verschärft werden, denn es existieren n-Ecke bzw. m-Ecke, für welche in (3) das Gleichheitszeichen gilt – man wähle z. B. mit $n = m = 3$ Dreiecke, die in keiner ihrer Winkelgrössen übereinstimmen. Ob dagegen die Ungleichung (3) für spezielle n bzw. m ($n > 3$) verschärft werden kann, ist eine offene Frage.
2. Die Abschätzung (3) bleibt natürlich auch für diejenigen nichtkonvexen Polygone richtig, von denen bekannt ist, dass sie jeweils in höchstens $n-2$ Dreiecke zerlegt werden können.
3. Bemerkenswert erscheint, dass sich die universellen Anzahlaussagen der drei Hilfssätze nicht in dieser Form auf höhere Dimension übertragen lassen. Ob es überhaupt einen konstruktiven und vergleichbar elementaren Beweis des Satzes von Debrunner für Polyeder des gewöhnlichen Raumes gibt, scheint eine offene Frage zu sein.

Eike Hertel, Friedrich-Schiller-Universität, Jena

LITERATURVERZEICHNIS

1 D. W. Crowe und I. J. Schoenberg: On the equidecomposability of a regular triangle and a square of equal areas. Mitt. Math. Sem. Giessen *164*, 59–64 (1984).
2 H. E. Debrunner: Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern. El. Math. *24*, 1–6 (1969).
3 J. Doyen und M. Landuyt: Dissections of polygons. Ann. Discr. Math. *18*, 315–318 (1983).
4 A. B. Harazišvili: Equicomposition of polyhedra relative to the group of homotheties and translations. Soviet Math. Dokl. *18*, No. 5, 1246–1249 (1977).
5 E. Hertel: Zur Minimalzahl von Zerlegungsteilen äquivalenter Werkstücke. Fo.-Ergebnisse FSU Jena N/82/70 (1982).
6 Ch. Meier: Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern. J. reine angew. Math. *253*, 193–202 (1972).
7 Ch. Richter: Mitteilung an den Verfasser, Jena 1986.
8 V. B. Zylev: G-composedness and G-complementability. Soviet Math. Dokl. *9*, 403–404 (1968).

Gedanken zum Integralbegriff im propädeutischen Unterricht Teil 2: Der Integralbegriff

Im ersten Teil dieser Arbeit haben wir den Begriff des Elementarintegrals behandelt. Dabei ging es uns insbesondere darum, diesen Begriff in ein allgemeines Umfeld einzubetten, welches auch in anderen Bereichen der Analysis von Bedeutung ist. Der auch heute noch oft beschrittene klassische Weg über das Riemann-Integral wird dieser Forderung sicher nicht gerecht. In der vorliegenden zweiten Arbeit geht es nun darum, einen Integralbegriff zu entwickeln, der den, im ersten Teil formulierten, allgemeinen Forderungen weitgehend gerecht wird.

Die hier diskutierte Methode lehnt sich eng an die von Daniell entwickelte allgemeine Integralkonstruktion an [1]. Auf die berechtigte Frage, warum wir nicht gleich diese Konstruktion in ihrer vollen Allgemeinheit im Propädeutikum behandeln wollen, werden wir später eingehen.

Wir diskutieren die Methode gleich für ein beliebiges positives lineares nullstetiges Funktional l auf einem Vektorverband $\mathscr{F}$ von Funktionen auf einer Menge X. In der Tat hängt sie in keiner Weise von zusätzlichen strukturellen Voraussetzungen ab. Sie ist damit unmittelbar auf alle im ersten Teil behandelten Beispiele von Elementarintegralen anwendbar.

Wir zerlegen die Konstruktion in mehrere einfache Schritte.

Schritt 1: Es bezeichne $\mathscr{F}^{\uparrow}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathbb{R}^X$, zu denen eine wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ von Funktionen aus $\mathscr{F}$ existiert, so dass $f = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} f_n$ und $\sup_{n \in \mathbf{N}} l(f_n) < \infty$. Dann besitzt $\mathscr{F}^{\uparrow}$ folgende Eigenschaften.

(a) Für alle $f, g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ ist $f + g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$, $f \vee g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ und $f \wedge g \in \mathscr{F}^{\uparrow}$.
(b) Für alle $f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist $\alpha f \in \mathscr{F}^{\uparrow}$.