Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1987)
Heft: 5

Artikel: Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper
Autor: Harborth, Heiko
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40039

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

und damit ([2], Seite 19, Satz 3.2)

$$S = 0\,(n^2/\log(n/\varepsilon)) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund des Hilfssatzes entspringt daraus aber der Widerspruch

$$n^2 = 0\,(n^2/\log(n/\varepsilon)) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aus der Widerlegung der obigen Annahme folgt die Behauptung des Theorems.

H. Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Bergmann: Aufgabe 906. Lösung von P. Bundschuh. El. Math. *40*, 52–53 (1985).
2 K. Pracher: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

ANMERKUNGEN

[1*] Äquivalente Eigenschaft: «a ist Primitivwurzel mod p».
[2*] Es gilt stets: $0 < \Omega^*(a \pmod p) \leqq 1$.
[3*] Für reelle Zahlen x sei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$.
[4*] Außer $\delta = 0$ für $a \equiv 0 \pmod 2$ gibt es zwei verschiedene Formeln für δ, je nachdem $a \equiv \pm 1 \pmod 4$.
[5*] Die Summe bricht ab, wenn $i > \log n/\log p$, und es ist $[n/p^i] \leqq n/p$.

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/050115-00$1.50+0.20/0

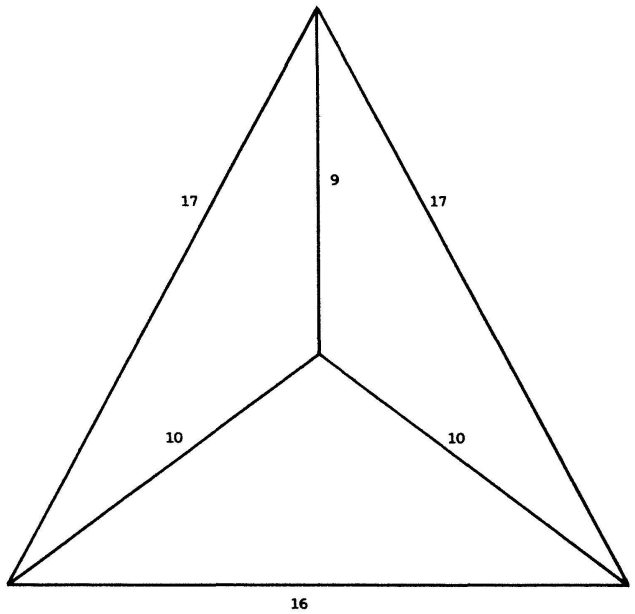
Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper

Herrn Professor Dr. Jörg M. Wills zu seinem fünfzigsten Geburtstag

Die fünf platonischen Körper sind seit mehr als zweitausend Jahren bekannt. Trotzdem bleiben auch heute noch immer wieder interessante ihrer Eigenschaften zu untersuchen (siehe zum Beispiel [2], [3], [4] und für historische Anmerkungen [6]).
In dieser Note werden die Graphen der platonischen Körper diskutiert. Diese Graphen sind planar, das heisst, sie lassen sich in der Ebene ohne Überkreuzungen der Kanten zeichnen.
Es ist bekannt ([5]), dass sich alle planaren Graphen sogar derart in der Ebene zeichnen lassen, dass alle Kanten geradlinig sind. Darüber hinaus soll nun auch die weitergehende Frage gestellt werden:

Lässt sich jeder planare Graph in der Ebene so darstellen, dass alle Kanten geradlinig und von ganzzahliger Länge sind?

Im folgenden wird diese Frage für die speziellen Graphen der platonischen Körper positiv beantwortet. Weiterhin werden die kleinsten Längen d der maximalen Kantenlängen aller solcher ganzzahligen planaren Darstellungen eines platonischen Körpers bestimmt, das heisst, es werden die kleinsten Beispiele ermittelt.



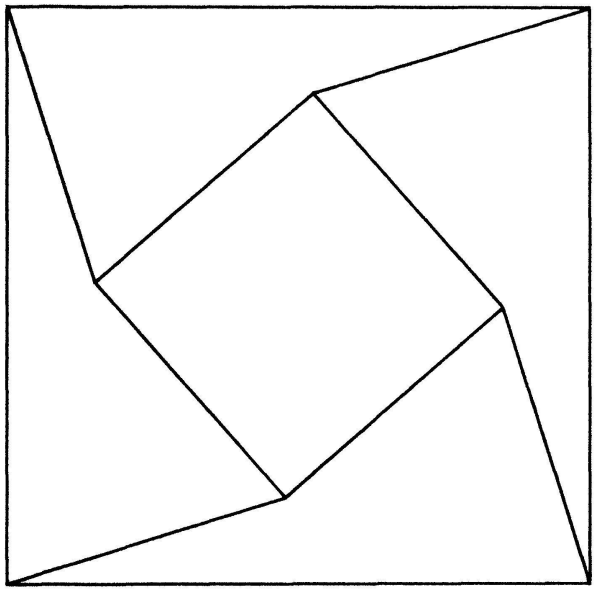
Figur 1.

Satz. *Mit d_i als Minimum der maximalen Kantenlängen aller ganzzahligen planaren Darstellungen der Graphen von Tetraeder* ($i=4$), *Würfel* ($i=6$), *Oktaeder* ($i=8$), *Dodekaeder* ($i=12$) *oder Ikosaeder* ($i=20$) *gelten* $d_4=17$, $d_6=2$, $d_8=13$, $d_{12}=2$ *und* $d_{20}=159$.

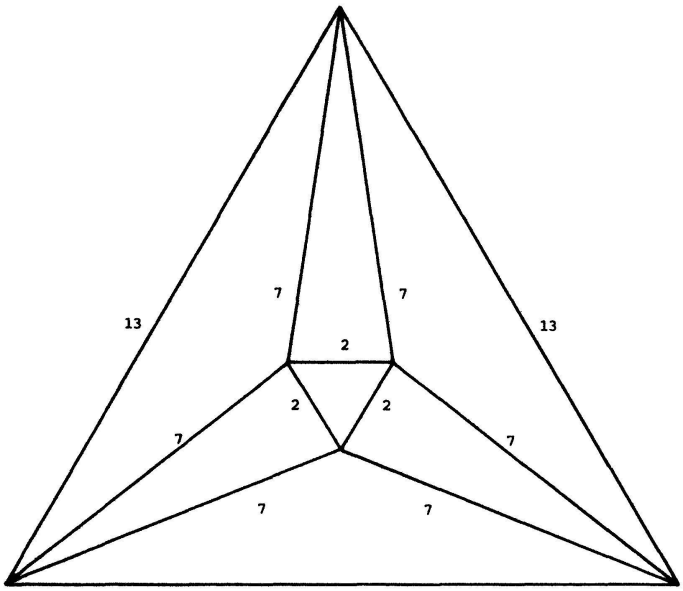
Beweis. $i=6$: Aus der Darstellung des Würfelgraphen in Figur 2 mit 4 Kanten der Länge 2 und 8 Kanten der Länge 1 folgt $d_6 \leqq 2$. Es wird nun angenommen, dass eine Darstellung mit allen Kanten der Länge 1 existiert. Dann muss es zwei Rhomben R_α und R_β mit Kantenlängen 1 und mit voneinander verschiedenen Eckpunkten (Knoten der Graphen) so geben, dass ein Rhombus ganz innerhalb des anderen liegt. Die kleinsten Innenwinkel der Rhomben seien mit $\alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}$ bezeichnet ($\alpha=\beta$ bedeutet Kongruenz von R_α und R_β). Dann folgt aus den Flächeninhalten $F_\alpha = \sin\alpha < F_\beta = \sin\beta$, dass R_β nicht innerhalb R_α, und aus den Durchmessern (längsten Diagonalen) $D_\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2} > D_\beta = 2\cos\frac{\beta}{2}$, dass R_α nicht innerhalb R_β liegen kann. Durch diesen Widerspruch ist $d_6 > 1$ bewiesen.

$i=12$: Die Darstellung des Dodekaedergraphen in Figur 4 mit 10 Kanten der Länge 2 und 20 Kanten der Länge 1 beweist $d_{12} \leqq 2$. Falls es eine Darstellung mit allen Kanten der Länge 1 gibt, dann ist ein Fünfeck mit Flächeninhalt F_{12} aufgeteilt in 11 sich nicht überlappende Fünfecke mit Flächeninhalten F_i, $1 \leqq i \leqq 11$. Dabei sind alle 12 Fünfecke einfach zusammenhängend und gleichseitig mit den Seitenlängen 1. Wenn für den Flächeninhalt F eines Fünfecks dieser Art

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq F \leqq \frac{5}{4}\tan^{-1}\frac{\pi}{5} \tag{1}$$



Figur 2.



13

Figur 3.

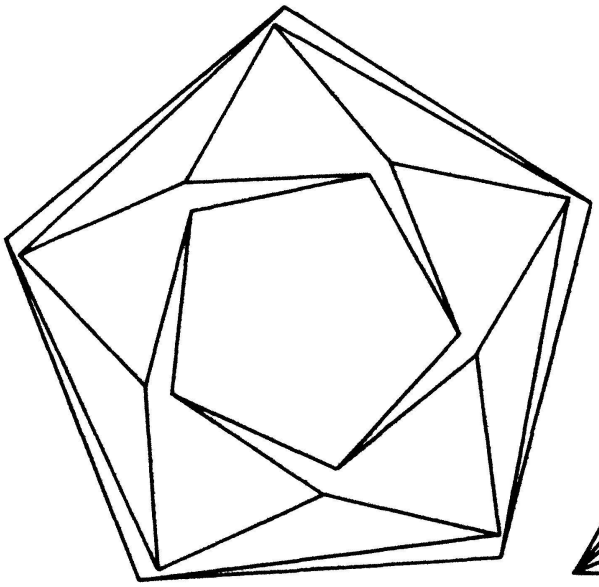
gilt, dann ist durch den Widerspruch

$$4 < \frac{11}{4}\sqrt{3} \leqq \sum_{i=1}^{11} F_i = F_{12} \leqq \frac{5}{4}\tan^{-1}\frac{\pi}{5} < 2 \tag{2}$$

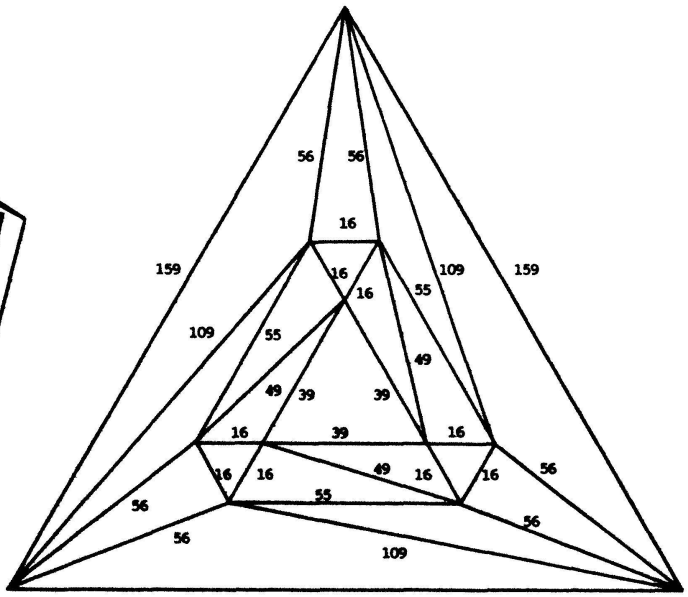
auch $d_{12} > 1$ bewiesen.

Die Abschätzung nach oben in (1) entspricht der bekannten Tatsache, dass unter allen Fünfecken mit dem konstanten Umfang der Länge 5 das regelmässige Fünfeck den grössten Flächeninhalt hat (siehe etwa [1], Seite 9).

Zum Beweis der unteren Abschätzung in (1) wird ein gleichseitiges, einfach zusammenhängendes Fünfeck in drei Dreiecke mit den Seitenlängen $(a, 1, 1)$, $(a, b, 1)$ und



Figur 4.



159

Figur 5.

$(b, 1, 1)$ zerlegt, wobei a und b die Längen der beiden Diagonalen sind, die von einem Eckpunkt des Fünfecks mit dem grössten Innenwinkel ausgehen. Unter Benutzung der Heronischen Formel für diese drei Dreiecke ergibt sich der Flächeninhalt F des Fünfecks zu

$$F = \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2} + \frac{b}{4}\sqrt{4-b^2} + \frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-1)\,(1-(a-b)^2)} \tag{3}$$

mit $2 \geqq a \geqq b \geqq 0$.
Nun werden vier Fälle unterschieden:

Fall 1: $1 \geqq a \geqq b \geqq 0$. Mit der Dreiecksungleichung $a+b \geqq 1$ im Dreieck $(a, b, 1)$ folgt aus (3)

$$F \geqq \frac{a}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{4}\sqrt{3} \geqq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fall 2: $\sqrt{3} \geqq a \geqq 1$ oder $\sqrt{3} \geqq b \geqq 1$. Da $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}$ für $x = \sqrt{2}$ sein Maximum hat, ist $f(1) = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ für $x = a$ und $x = b$ das Minimum.

Fall 3: $2 \geqq a \geqq b \geqq \sqrt{3}$. Aus (3) folgt

$$F \geqq \frac{1}{4}\sqrt{((2\sqrt{3})^2-1)\,(1-(2-\sqrt{3})^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{11\,(4\sqrt{3}-6)} > \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fall 4: $2 \geqq a \geqq \sqrt{3}$ und $1 \geqq b$. Mit der Dreiecksungleichung $a \leqq b+1$ im Dreieck $(a, b, 1)$ folgt aus den ersten beiden Termen rechts in (3)

$$F \geqq \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-(b+1)^2} + \frac{b}{4}\sqrt{3} \geqq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$i = 4$, 8 *und* 20: Für diese drei Zerlegungen der Ebene in Dreiecke wurden die Werte für d_i per Computer bestimmt (Amdahl 470 der Technischen Universität Braunschweig). Die kleinsten Beispiele sind aus den Figuren 1, 3 und 5 zu entnehmen.

Abschliessend sei noch angemerkt, dass die minimalen Beispiele in den Figuren 1, 3 und 5 starr sind, wohingegen die in den Figuren 2 und 4 in sich beweglich sind.

Heiko Harborth, Arnfried Kemnitz, Meinhard Möller, Andreas Süssenbach
Techn. Universität Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972.
2 Ch. Hippenmeyer: Aufgabe 804. Elem. Math. *34*, 61–63 (1979).
3 M. Jeger: Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders. Elem. Math. *30*, 73–82 (1975).

4 D. H. Lehmer: Coloring the platonic solids. Amer. Math. Monthly *93*, 288–292 (1986).
5 K. Wagner: Graphentheorie. BI Mannheim, 1970.
6 J. M. Wills: Mathematik und Kunst: Die platonischen Körper. Siegener Studien (Liter. und Naturwiss.) *35*, 17–27 (1983/84).

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/87/050000-00$1.50+0.20/0

Some inequalities for the triangle

Notation. a, b, c – sides BC, CA, AB of a triangle ABC; α, β, γ – its angles; s – semi-perimeter; F – area; R – radius of circumcircle; r – radius of incircle; h_a, h_b, h_c – altitudes; m_a, m_b, m_c – medians and r_a, r_b, r_c – radii of excircles.

Theorem 1. *In every triangle the following equalities are valid:*

$$\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}+\frac{h_a+h_b}{r_c}=6 \tag{1}$$

$$\cos^3\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos^3\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}+\cos^3\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3s}{4R}. \tag{2}$$

Proof. Since

$$h_a=\frac{2F}{a}, \qquad h_b=\frac{2F}{b}, \qquad h_c=\frac{2F}{c} \qquad \text{and}$$

$$r_a=\frac{F}{s-a}, \qquad r_b=\frac{F}{s-b}, \qquad r_c=\frac{F}{s-c},$$

we have

$$\begin{aligned}&\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}+\frac{h_a+h_b}{r_c}\\ &=\frac{2}{abc}\left(a(s-a)(b+c)+b(s-b)(c+a)+c(s-c)(a+b)\right)\\ &=\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3-2s(a^2+b^2+c^2)+2s(ab+bc+ca)\right).\end{aligned}$$