Ein bewegliches Tetraederpaar

Autor(en): **Stachel, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40802

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 43 Nr. 3 Seiten 65–96 Basel, Mai 1988

Ein bewegliches Tetraederpaar

Die Diagonalen der Seitenflächen eines Würfels bilden die Kanten zweier regulärer Tetraeder **T** und **T**′. Jede Kante von **T** hat einen gemeinsamen Mittelpunkt mit einer Kante von **T**′. Realisiert man beide Tetraeder als Kantenmodelle, wobei jede Kante von **T** innerhalb der schneidenden Kante von **T**′ verläuft – die Kantendicke werde vernachlässigt –, so zeigt sich, dass **T** relativ zu **T**′ von der beschriebenen Position der «stella octangula» aus beweglich ist, wie als erster der ungarische Student L. Tompos Jr. im Jahr 1982 entdeckte. In einer umfangreichen Arbeit [3] haben T. Tarnai und E. Makai Jr. gezeigt, dass die Relativbewegung **T**/**T**′ drei in bestimmter Weise verbundene zweiparametrige Bewegungsvorgänge und vier Zwangläufe umfasst. Im folgenden wird die Geometrie dieser Bewegungsvorgänge untersucht und ausserdem die bisher offen gebliebene Frage geklärt, ob damit jede mögliche Lage von **T** relativ zu **T**′ erreicht wird.

1. Bezeichnung

Seien $A_1', \ldots, A_4'$ die Ecken und $a_{12}', \ldots, a_{34}'$ die Trägergeraden der Kanten $A_1'A_2', \ldots, A_3'A_4'$ des regulären Tetraeders **T**′. Wir suchen alle jene Positionen des zu **T**′ kongruenten Tetraeders **T**, in welchen jede der sechs Kanten von **T** mit genau einer Kante von **T**′ einen inneren Punkt gemein hat. Diese Lagen sollen im folgenden *zulässig schneidend* heissen.

Sei $\mathbf{T}^1$ eine derartige Position und γ eine Bewegung, die **T**′ auf $\mathbf{T}^1$ abbildet. Ist $\mathscr{G}$ die Gruppe der 24 Deckbewegungen von **T**, so ist für jedes $\beta \in \mathscr{G}$ auch das Produkt $\gamma\beta$ eine Bewegung mit $\mathbf{T} \to \mathbf{T}^1$. Wir können γ als jene eindeutig bestimmte Kongruenzabbildung voraussetzen, bei der für jedes $i \in \{1, \ldots, 4\}$ das Bild $A_i'\gamma$ von A_i' aus jener Seitenfläche von **T**′ herausragt, welche A_i' gegenüberliegt. Es schneidet dann jede Kante von **T**′ das Bild ihrer Gegenkante. γ ist ungleichsinnig, denn erscheint von A_4' aus die Durchlaufung der Punkte A_1', A_2', A_3' positiv, so auch jene von $A_1'\gamma, A_2'\gamma, A_3'\gamma$. Die Punkte A_4' und $A_4'\gamma$ liegen auf verschiedenen Seiten der Verbindungsebene von $A_1'\gamma, A_2'\gamma, A_3'\gamma$.

Es wird sich zeigen, dass in der Nebenklasse $\gamma\mathscr{G}$ stets eine involutorische Bewegung vorkommt, nämlich entweder eine Geraden- oder eine Ebenenspiegelung.

Wir wollen im folgenden den Abstand von je zwei Gegenkanten der Tetraeder **T**′ und **T** (Kantenlänge des Ausgangswürfels) auf 2 normieren. Dann ist $2\sqrt{2}$ die gemein-

same Kantenlänge und $4/\sqrt{3}$ die Höhe. Mit $\mathbf{T}'$ werden zwei Koordinatensysteme verbunden, deren Ursprung beidemale in der Tetraedermitte O liegt:
Die x-Achse des einen Systems $\mathscr{S}$ sei zu a'_{12} parallel, die y-Achse parallel zu a'_{34}. Es kann (siehe Abb. 2)

$$\begin{aligned} A'_1 &= (\sqrt{2}, 0, -1)_{\mathscr{S}}, \quad & A'_2 &= (-\sqrt{2}, 0, -1)_{\mathscr{S}}, \\ A'_3 &= (0, \sqrt{2}, 1)_{\mathscr{S}}, \quad & A'_4 &= (0, -\sqrt{2}, 1)_{\mathscr{S}} \end{aligned} \tag{1}$$

vorausgesetzt werden.
Bei dem anderen Koordinatensystem $\bar{\mathscr{S}}$ gehe die $\bar{z}$-Achse durch A'_1. Die Ecke A'_2 liege in der Ebene $\bar{y} = 0$; also ist etwa (siehe Abb. 1 a)

$$A'_1 = (0, 0, \sqrt{3})_{\bar{\mathscr{S}}}, \qquad A'_2 = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)_{\bar{\mathscr{S}}}, \tag{2}$$

$$A'_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)_{\bar{\mathscr{S}}}, \quad A'_4 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)_{\bar{\mathscr{S}}}.$$

2. Zwangläufe

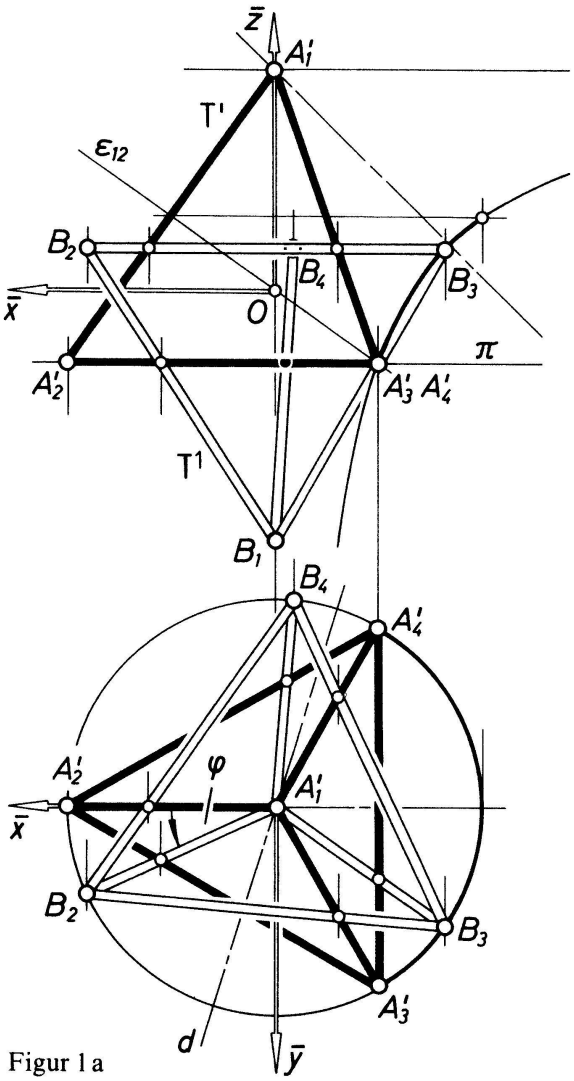
Die Betrachtung eines Modells der beweglichen Tetraeder zeigt die Existenz zwangläufiger Relativbewegungen, bei welchen eine Flächenachse (= dreizählige Symmetrieachse) von $\mathbf{T}$ ständig mit einer gleichartigen Achse von $\mathbf{T}'$ zusammenfällt. Zwangläufe mit einer Fixgeraden heissen *axiale Umschwünge.*
Sei etwa die Ebene π von A'_2, A'_3, A'_4 horizontal und A'_1 über π gelegen. Wir drehen nun das Basisdreieck um die $\bar{z}$-Achse durch den Winkel φ bei $0 < \varphi < 2\pi/3$ (siehe Abb. 1 a). Dann ist das neue Dreieck als Grundriss eines wohlbestimmten horizontalen Dreiecks $B_2B_3B_4$ aufzufassen, dessen Seiten die «Mantelkanten» von $\mathbf{T}'$ schneiden. Der Sinussatz ergibt für die $\bar{z}$-Koordinate dieses Dreiecks die Proportion

$$(\sqrt{3} - \bar{z}) : \frac{4}{\sqrt{3}} = \sin\frac{\pi}{6} : \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \varphi\right),$$

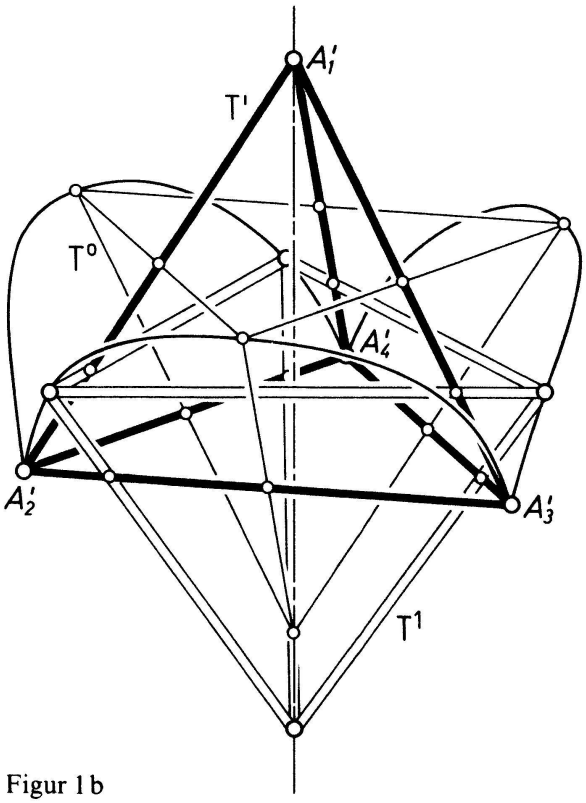
somit

$$(3 - \bar{z}\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) = 2. \tag{3}$$

Wir ergänzen das Dreieck $B_2B_3B_4$ durch den unter π gewählten Punkt B_1 zu einem regulären Tetraeder $\mathbf{T}^1$. Aus Symmetriegründen müssen auch die Basiskanten von $\mathbf{T}'$ die Mantelkanten von $\mathbf{T}^1$ schneiden. Der freien Wahl von φ entsprechend gehen diese Positionen $\mathbf{T}^1$ bei einem (stetigen) Zwanglauf $\mathscr{G}$ ineinander über, nämlich bei dem durch (3) definierten axialen Umschwung längs der $\bar{z}$-Achse (Bewegungen 3. Art nach [3]).



Figur 1 a



Figur 1 b

Für die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\mathcal{F}}$ einer Ecke des Dreiecks $B_2B_3B_4$ gilt neben der Gleichung (3)

$$\bar{x} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$$

Zusammen mit (3) folgt daraus

$$(\bar{z} - \sqrt{3})\,\bar{x} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \tag{4}$$

Die Bahnkurve dieser Ecke beim Zwanglauf $\mathcal{G}$ (siehe Abb. 1 a) gehört einem gleichseitigen hyperbolischen Zylinder an, dessen Achse durch A_1' geht. $\bar{x} = 0$ ist eine asymptotische Ebene; der Zylinder enthält die Gerade a_{34}'.
Die zu $\varphi = \pi/3$ gehörige Lage von **T** ist die stella-octangula-Position $\mathbf{T}^0$.

Satz 1: *Längs jeder dreizähligen Symmetrieachse von* **T**′ *gibt es einen achsialen Umschwung, bei dem das Gangtetraeder* **T** *stets zulässig schneidende Lagen einnimmt.*

Die nichtgeraden Punktbahnen dieser Zwangläufe liegen auf Raumkurven 4. Ordnung, 1. Art, nämlich den Schnittkurven von Drehzylindern mit dazu normalen gleichseitigen hyperbolischen Zylindern (siehe Abb. 1b).

Für jede bei $\mathscr{Y}$ erreichte Lage $\mathbf{T}^1$ gibt es drei Geradenspiegelungen, die $\mathbf{T}'$ mit $\mathbf{T}^1$ vertauschen. Die zugehörigen Spiegelungsachsen liegen in der Mitte zwischen der Basisebene π von $\mathbf{T}'$ und der Ebene $B_2B_3B_4$ und sie schneiden die $\bar{z}$-Achse. Sei δ diejenige Geradenspiegelung, bei welcher die Kante $A_1'A_2'$ das Bild $A_3'\delta A_4'\delta$ der Gegenkante schneidet. Dann bildet die Achse d von δ (siehe Abb. 1a) mit der $\bar{x}$-Achse einen Winkel vom Mass $\varphi/2+\pi/3$. Die Koordinaten der Punkte von d können angesetzt werden als

$$\left(-r\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right),\ r\cos\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right),\ \frac{1}{2}\left(\bar{z}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)_{\mathscr{F}}$$

mit $r\in\mathbb{R}$ und $\bar{z}$ gemäss (3) und genügen daher der Gleichung

$$(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+(1-\bar{z}\sqrt{3})(\bar{x}^2-\bar{y}^2)=0. \tag{5}$$

Der Zwanglauf $\mathscr{Y}$ ist enthalten in der *symmetrischen Schrotung* (vgl. [2]) mit dem durch (5) gegebenen geraden kubischen Konoid Γ' als *Grundregelfläche.* Γ' besitzt orthogonale Torsalerzeugende in den Ebenen

$$\bar{z}=0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{z}=2/\sqrt{3}$$

und ferner drei reelle Ferngeraden.

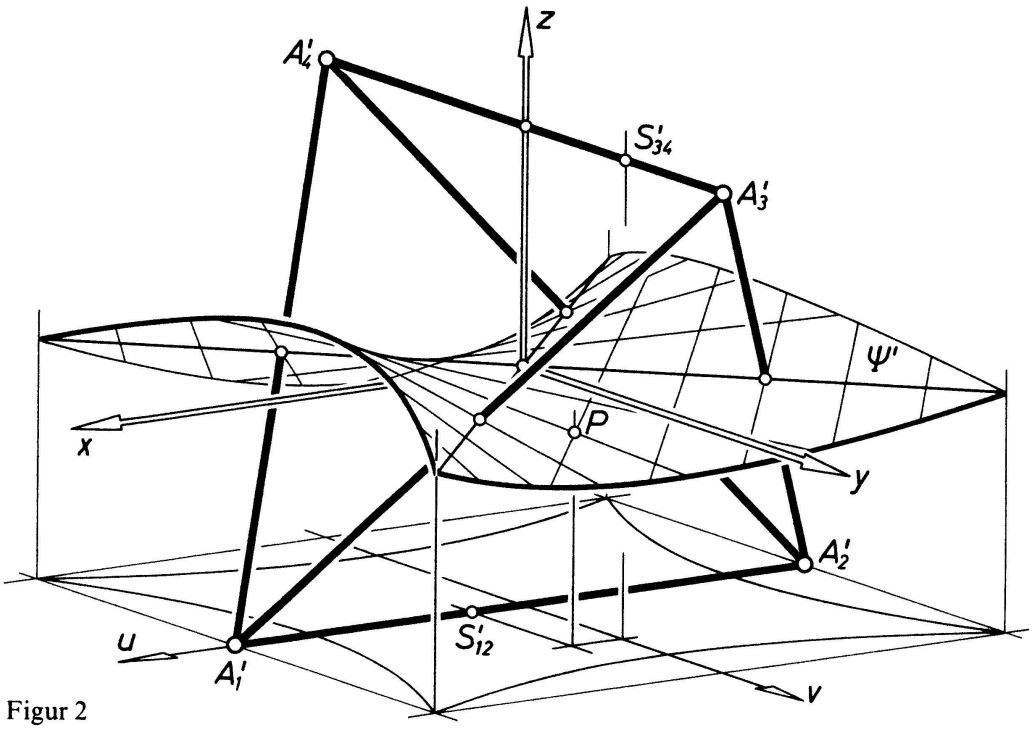
3. Zweiparametrige Bewegungsvorgänge

Wir unterwerfen das Tetraeder $\mathbf{T}'$ der Spiegelung σ in einer Ebene ε, welche das Eckenpaar A_1' und A_2' vom Paar A_3', A_4' trennt. Nun schneidet jede der Kanten $A_1'A_3'$, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$, $A_2'A_4'$ das zugehörige Spiegelbild in einem inneren Punkt. Wie muß ε liegen, damit auch die beiden restlichen Kanten von $\mathbf{T}'$ Schnittpunkte mit Kanten des Bildtetraeders $\mathbf{T}'\sigma$ aufweisen? Da nur $A_1'A_2'$ und $A_3'\sigma A_4'\sigma$ sowie $A_3'A_4'$ und $A_1'\sigma A_2'\sigma$ diese Paare schneidender Kanten sein können und deren Schnittpunkte S_{12}' bzw. S_{34}' einander in σ entsprechen, ist ε notwendig die Symmetrieebene von Punkten $S_{12}'\in a_{12}'$ und $S_{34}'\in a_{34}'$.
Wir lassen vorerst die aus der geforderten Lage von ε folgenden Einschränkungen für diese Kantenschnittpunkte ausser acht, verwenden das Koordinatensystem $\mathscr{S}$ und setzen

$$S_{12}'=(u,0,-1)_{\mathscr{S}}, \qquad S_{34}'=(0,v,1)_{\mathscr{S}} \text{ mit } (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Die zugehörige Symmetrieebene ε hat die Gleichung

$$2ux-2vy-4z-u^2+v^2=0, \tag{6}$$



Figur 2

berührt daher das gleichseitige hyperbolische Paraboloid (siehe Abb. 2)

$$\Psi': x^2 - y^2 - 4z = 0 \tag{7}$$

im Punkt

$$P = \left(u, v, \frac{u^2 - v^2}{4}\right)_{\mathscr{S}}. \tag{8}$$

Spiegelt man den Rastraum Σ' an allen Tangentialebenen von Ψ', so entstehen Lagen des Gangraumes Σ, die eine *zweiparametrige symmetrische Rollung* $\mathscr{R}$ mit der *Grundfläche* Ψ' definieren (vgl. [2] oder [1], Seite 80). Eine zu Ψ' kongruente Fläche $\Psi \subset \Sigma$ rollt dabei derart auf Ψ' ab, dass Ψ und Ψ' stets symmetrisch sind bezüglich der Tangentialebene im Berührpunkt P. Jede glatte Kurve c' auf Ψ' bestimmt als Ort der Berührpunkte einen in $\mathscr{R}$ enthaltenen Zwanglauf, eine einparametrige symmetrische Rollung; deren Rastpolfläche ist die Ψ' längs c' berührende Torse.

Wählt man c' als Erzeugende von Ψ' ($u - v =$ konst. oder $u + v =$ konst.), so wird dieser Zwanglauf zur stetigen Drehung von Σ um diese Erzeugende. Die Drehungen um die Scheitelerzeugenden von Ψ', also die Kantenachsen $z = x - y = 0$ bzw. $z = x + y = 0$ von $\mathbf{T}'$ heissen in [3] Bewegungen 1. Art.

Für $c' \subset \Psi'$ als Parabel ($a u + b v =$ konst. bei $|a| \neq |b|$ und $|a| + |b| > 0$) entsteht eine symmetrische Rollung parabolischer Zylinder. Unter den durchwegs ebenen Bahnkurven gibt es ein Parallelbüschel von Geraden. Ist c' insbesondere ein Hauptschnitt von Ψ' ($u = 0$ bzw. $v = 0$), so haben zwei Ecken von $\mathbf{T}$ geradlinige Bahnen (Bewegungen 2. Art nach [3]).

Die Punktbahnen bei $\mathscr{R}$ sind erzeugbar, indem ein fester Punkt $A' \in \Sigma'$ an allen Tangentialebenen von Ψ' gespiegelt wird. Dieselbe Punktmenge entsteht, wenn man die

Tangentialebenen von Ψ' zuerst an der in A' zentrierten Einheitskugel polarisiert, dann invertiert und schliesslich die Bildpunkte aus A' noch mit dem Faktor 2 streckt. Die Punktbahnen bei $\mathscr{R}$ erweisen sich somit als zirkulare kubische Flächen mit ihrem *Grundpunkt* A' als zweifachem Punkt. Jede Bahnfläche enthält die Fernerzeugende der xy-Ebene sowie zwei durch A' gehende orthogonale Geraden; letztere sind Träger der Büschel derjenigen Ebenen, in welchen die Bahnkreise bei den in $\mathscr{R}$ enthaltenen stetigen Drehungen liegen.
Hat A' die Koordinaten $(\xi, \eta, \zeta)_{\mathscr{S}}$, so gilt für den an der Ebene ε aus (6) gespiegelten Punkt $A'\sigma = (x, y, z)_{\mathscr{S}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{u^2 - v^2}{u^2+v^2+4} \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{u^2+v^2+4} \begin{pmatrix} -u^2+v^2+4 & 2uv & 4u \\ 2uv & u^2-v^2+4 & -4v \\ 4u & -4v & u^2+v^2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Durch Elimination von u und v folgt daraus als Gleichung der zugehörigen Bahnfläche

$$2(x+y-\xi-\eta)(x-y-\xi+\eta) - (z-\zeta)(x^2+y^2+z^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2) = 0. \quad (10)$$

Welcher Teil $\mathscr{R}_z$ von $\mathscr{R}$ liefert die zulässig schneidenden Positionen des Gangtetraeders? Da S'_{12} und S'_{34} innere Punkte ihrer Kanten sein müssen, gilt für die Parameter u und v

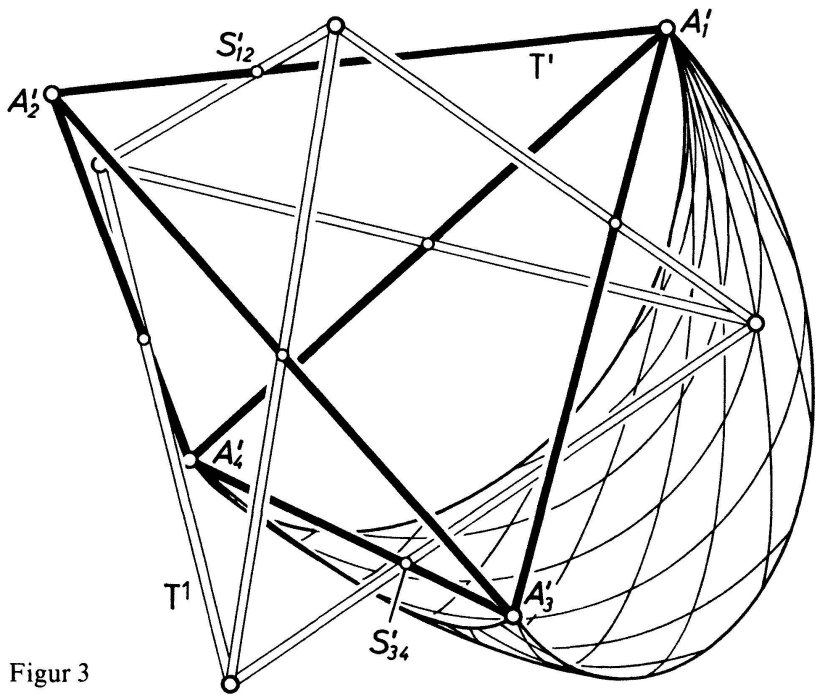
$$-\sqrt{2} < u, v < \sqrt{2}.$$

Der Punkt $(u, v, 0)_{\mathscr{S}}$ in der xy-Ebene ist nach (8) Grundriss des Berührpunktes P der Symmetrieebene ε aus (6) mit dem Paraboloid Ψ' (vgl. Abb. 2). Damit wird der Definitionsbereich in der (u, v)-Ebene von jenen vier, den Punkt $(0,0)$ umschliessenden Hyperbelbögen begrenzt, die den Grundrissen der Berührkurven der aus $A'_1, \ldots, A'_4$ an Ψ' legbaren Tangentialkegel angehören. Also wird $\mathscr{R}_z$ innerhalb $\mathscr{R}$ durch die folgenden vier Ungleichungen gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} &(u+\sqrt{2})^2 < 6+v^2, \quad (v+\sqrt{2})^2 < 6+u^2, \\ &(u-\sqrt{2})^2 < 6+v^2, \quad (v-\sqrt{2})^2 < 6+u^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Randzwangläufe von $\mathscr{R}_z$ sind sphärisch; die Rastpolachsen liegen auf den genannten, übrigens orthogonalen Tangentialkegeln von Ψ'; die Punkte der Fokalgeraden des Gangkegels laufen auf Grosskreisen.

Satz 2: *Es gibt drei zweiparametrige symmetrische Rollungen, bei welchen das Gangtetraeder* **T** *stets zulässige Lagen einnimmt. Die Grundflächen dieser Rollungen liegen auf hyperbolischen Paraboloiden mit zweizähligen Symmetrieachsen von* **T**′ *als Scheitelerzeugenden. Die zweiparametrigen Rollungen enthalten insbesondere stetige Drehungen um die Erzeugenden dieser Paraboloide. Die Bahnflächen der Ecken des bewegten Tetraeders liegen auf zirkularen kubischen Flächen.*



Figur 3

Abb. 3 zeigt die zum Grundpunkt A'_1 gehörige Bahn einer Ecke von **T** unter $\mathscr{R}_z$ mit den zwei Scharen von Bahnkreisbögen. Alle anderen Eckenbahnen sind dazu kongruent.

Welche Lagen des Tetraeders **T** gehören gleichzeitig zwei verschiedenen zweiparametrigen Rollungen an? Angenommen, eine Lage von **T** entsteht aus **T**′ durch die Spiegelungen σ_1 und σ_2 an zwei verschiedenen Ebenen ε_1 bzw. ε_2, welche jeweils vier Kanten von **T**′ und **T** in inneren Punkten schneiden. Nun unterscheiden sich σ_1 und σ_2 durch eine Deckbewegung von **T**, etwa $\sigma_2 = \sigma_1 \beta$. Damit ist $\beta = \sigma_1 \sigma_2 \in \mathscr{G}$ eine Drehung um eine Flächen- oder Kantenachse von **T**. Ersteres ist unmöglich, da ε_1 und ε_2 keine Ecke von **T** enthalten dürfen. Somit sind ε_1 und ε_2 orthogonale Ebenen durch eine Kantenachse von **T** und **T**′, also durch eine Scheitelerzeugende der zugehörigen Grundparaboloide. Umgekehrt gehört die stetige Drehung um eine Kantenachse, soweit sie zulässig schneidende Lagen liefert, zu zwei verschiedenen zweiparametrigen symmetrischen Rollungen.

Welche Lagen von **T** werden gleichzeitig bei einem Zwanglauf aus Satz 1 und einer Rollung aus Satz 2 erreicht? Nun gibt es analog ein $\beta = \delta\sigma \in \mathscr{G}$, wobei δ eine Geradenspiegelung ist, deren Achse eine Flächenachse von **T**′ und **T** orthogonal schneidet. Die Tetraedermitte O ist Fixpunkt von β; der Punkt $O\delta = O\sigma$ liegt auf der bei δ fixbleibenden Flächenachse. Bei $O\delta \neq O$ wäre die Spiegelungsebene von σ parallel zu einer Seitenfläche von **T**′, könnte also die vier Ecken von **T**′ nicht paarweise trennen. Also bleibt $O\delta = O$ und damit $\mathbf{T}'\delta = \mathbf{T}^0$.

$\mathbf{T}^0$ is gleichzeitig die einzige gemeinsame Lage von **T** bei zwei verschiedenen axialen Umschwüngen, denn hier müssen zwei Flächenachsen von **T** mit solchen von **T**′ zusammenfallen.

Satz 3: *Genau diejenigen* **T**′ *zulässig schneidenden Lagen von* **T**, *die aus* $\mathbf{T}^0$ *durch stetige Drehung um eine Kantenachse von* **T**′ *hervorgehen, werden bei zwei verschiedenen zweiparametrigen symmetrischen Rollungen aus Satz 2 gleichzeitig erreicht.*

Hingegen ist $\mathbf{T}^0$ *die einzige gemeinsame Position bei zwei verschiedenen axialen Umschwüngen gemäss Satz 1 oder auch bei einem axialen Umschwung und einer zweiparametrigen symmetrischen Rollung.*

4. Bestimmung aller zulässig schneidenden Lagen von T

Sei $\mathbf{T}^1$ eine $\mathbf{T}'$ zulässig schneidende Lage des Gangtetraeders.

(i) *Unter den 24 Bewegungen, die* $\mathbf{T}'$ *auf* $\mathbf{T}^1$ *abbilden, gibt es genau eine mit der Eigenschaft, dass die Kanten* $A_1'A_3'$, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ *und* $A_2'A_4'$ *von* $\mathbf{T}'$ *ihre Bildkanten schneiden. Die restlichen Kanten schneiden das Bild der jeweiligen Gegenkante.*
Diese Bewegung $\varkappa$ *is ungleichsinnig.*

Beweis: $\varkappa$ ist das Produkt der Bewegung γ aus Abschnitt 1 und der Spiegelung an der gemeinsamen Normalen von $a_{12}'\gamma$ und $a_{34}'\gamma$.

Jede ungleichsinnige Bewegung ist die Spiegelung an einer Ebene ε oder das Produkt dieser Ebenenspiegelung mit einer Translation parallel zu ε (Gleitspiegelung) oder mit einer Drehung um eine zu ε normale Achse (Drehspiegelung), insbesondere im Fall einer Halbdrehung eine Punktspiegelung. Welche dieser Möglichkeiten trifft nun auf $\varkappa$ aus (i) zu?
Offensichtlich kommen hierfür alle Spiegelungen an denjenigen Ebenen in Frage, welche die Kanten $A_1'A_3'$, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$, $A_2'A_4'$ in inneren Punkten schneiden. Das liefert genau die zum Gegenkantenpaar a_{12}', a_{34}' gehörige zweiparametrige symmetrische Rollung aus Satz 2.
Bei einer Punktspiegelung muss eine Gerade, die ihre Bildgerade im Endlichen schneidet, durch das Spiegelungszentrum gehen. Hier kann die geforderte Schnittbedingung für die vier Tetraederkanten nicht erfüllt werden. Dasselbe gilt für diejenigen Gleitspiegelungen, welche keine reinen Ebenenspiegelungen sind. Ist nämlich g eine Gerade, die ihre Bildgerade im Endlichen schneidet, so muss die durch g legbare Normalebene zur Spiegelungsebene parallel zur Translationsrichtung verlaufen. Nun gibt es aber keine Ebene, die zu allen vier Geraden a_{13}', a_{14}', a_{23}', a_{24}' parallel ist.

(ii) *Sei* $\varkappa$ *eine nichtinvolutorische Drehspiegelung. Genau dann schneidet eine Gerade* g *ihre Bildgerade* $g\varkappa$ *oder ist dazu parallel, wenn* g *mit der Drehspiegelungsachse* e *eine in der Spiegelungsebene* ε *gelegene Normale gemein hat.*

Beweis: Bei der stetigen Drehung um e überstreicht jede von e verschiedene Gerade g ein einschaliges Drehhyperboloid, einen Drehkegel, einen Drehzylinder oder eine Ebene Φ. Das Bild $g\varkappa$ liegt auf der zu Φ bezüglich ε spiegelbildlichen Fläche $\Phi\varkappa$. Bei $\Phi = \Phi\varkappa$ sind g und $g\varkappa$ schneidend oder parallel. Bei $\Phi \neq \Phi\varkappa$ könnte ein Schnittpunkt von g mit $g\varkappa$ als Punkt von $\Phi \cap \Phi\varkappa$ nur in ε oder in der Fernebene liegen. Damit wäre er ein Fixpunkt von $\varkappa$; g enthielte den Schnittpunkt $e \cap \varepsilon$ oder den Fernpunkt von e, und damit wäre aber wieder $\Phi = \Phi\varkappa$. Genau bei $\Phi = \Phi\varkappa$ gilt die in (ii) genannte Normalenbedingung.

(iii) *Sei* $\varkappa$: $\mathbf{T}' \to \mathbf{T}^1$ *eine nichtinvolutorische Drehspiegelung, bei welcher jede der Geraden* a'_{13}, a'_{14}, a'_{23}, a'_{24} *ihre Bildgerade schneidet oder dazu parallel ist. Dann muss der Fixpunkt* E *von* $\varkappa$
a) auf einer der Kantenachsen $z = x + y = 0$ *oder* $z = x - y = 0$ *von* $\mathbf{T}'$ *liegen oder*
b) auf einer der Hyperbeln $x = 3y^2 - 2z^2 - 4z = 0$ *oder* $y = 3x^2 - 2z^2 + 4z = 0$.

Beweis: Sei $E = (\xi, \eta, \zeta)_{\mathscr{P}}$. Die Fusspunkte der Normalen aus E an die Geraden a'_{13}, a'_{14}, a'_{23}, a'_{24} haben die Koordinaten

$$\tfrac{1}{4}(\xi - \eta - \zeta\sqrt{2} + 2\sqrt{2},\ -\xi + \eta + \zeta\sqrt{2} + 2\sqrt{2},\ -\xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2} + 2\zeta)_{\mathscr{P}},$$

$$\tfrac{1}{4}(\xi + \eta - \zeta\sqrt{2} + 2\sqrt{2},\ \ \xi + \eta - \zeta\sqrt{2} - 2\sqrt{2},\ -\xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2} + 2\zeta)_{\mathscr{P}},$$

$$\tfrac{1}{4}(\xi + \eta + \zeta\sqrt{2} - 2\sqrt{2},\ \ \xi + \eta + \zeta\sqrt{2} + 2\sqrt{2},\ \ \xi\sqrt{2} + \eta\sqrt{2} + 2\zeta)_{\mathscr{P}},$$

$$\tfrac{1}{4}(\xi - \eta + \zeta\sqrt{2} - 2\sqrt{2},\ -\xi + \eta - \zeta\sqrt{2} - 2\sqrt{2},\ \ \xi\sqrt{2} - \eta\sqrt{2} + 2\zeta)_{\mathscr{P}}.$$

Nach Auswertung einer Determinante zeigt sich, dass die in (ii) geforderte Komplanarität dieser vier Punkte äquivalent ist zu

$$\xi\,\eta\,\zeta = 0.$$

Bei $\zeta = 0$ erhält die Drehspiegelungsebene ε die Gleichung

$$4(\xi x - \eta y + 2z) = \xi^2 - \eta^2. \tag{12}$$

Genau dann gehört auch E dieser Ebene an, wenn $\xi^2 - \eta^2 = 0$ gilt.
Bei $\xi = 0$ erfüllen die Normalenfusspunkte die Gleichung

$$4\eta y - 4(\zeta + 2)z - \eta^2 + 2\zeta(\zeta + 2) = 0; \tag{13}$$

ist zusätzlich $\eta = \zeta + 2 = 0$, so fallen diese Punkte paarweise in A'_1 und A'_2 zusammen. Die oben angegebene Hyperbel kennzeichnet den Fall, wo E mit den vier Normalenfusspunkten komplanar liegt.
Der Fall $\eta = 0$ entsteht aus dem eben genannten nach einer Vertauschung der x- und y-Koordinaten und einem Vorzeichenwechsel der z-Koordinaten, der Spiegelung von $\mathbf{T}'$ an der gemeinsamen Normalen von a'_{13} und a'_{24} entsprechend.

Bei den Drehspiegelungen $\varkappa$ nach (iii) a mit Fixpunkt $E = (\xi, \xi, 0)_{\mathscr{P}}$ hat die Spiegelungsebene ε nach (12) die Gleichung

$$\xi(x - y) + 2z = 0.$$

Die gemeinsame Normale n: $x - y = z = 0$ von a'_{13} und a'_{24} inzidiert mit E und ε; dasselbe muss auch für deren Bild $n\varkappa$ gelten. Das Produkt der Drehspiegelung $\varkappa$ mit der Spiegelung an dieser $a'_{13}\varkappa$ und $a'_{24}\varkappa$ treffenden Kantenachse $n\varkappa$ von $\mathbf{T}'\varkappa = \mathbf{T}^1$ ist eine

Ebenenspiegelung σ an einer zu ε normalen Ebene durch E, wobei wegen (i) nun die Kanten $A_1'A_2'$, $A_1'A_3'$, $A_2'A_4'$, $A_3'A_4'$ die zugehörigen Spiegelbilder schneiden. Alle derartigen zulässig schneidenden Positionen von **T** sind im Satz 2 erfasst. Analoges gilt für die zweite Vorzeichenwahl in (iii) a.

(iv) *Zu jedem von O verschiedenen Punkt E der in* (iii) b *angegebenen Hyperbeln als Fixpunkt gibt es höchstens zwei Drehspiegelungen $\varkappa$ mit der in* (i) *geforderten Eigenschaft.*

Beweis: Im ersten Fall ist

$$E = (0, \eta, \zeta)_{\mathscr{S}} \quad \text{bei} \quad 3\eta^2 - 2\zeta(\zeta + 2) = 0$$

als Fixpunkt vorauszusetzen. Die Fixebene ε hat bei $\eta = \zeta + 2 = 0$ die Gleichung $y = 0$, ansonsten nach (13)

$$2\eta y - 2(\zeta + 2) z + \eta^2 = 0.$$

Die zu ε normale Gerade e durch E ist die Drehspiegelungsachse von $\varkappa$.
Bei $\eta\, 0$ schneidet e die Gerade a_{34}' nichtorthogonal; $a_{34}'\varkappa$ liegt somit auf einem Drehkegel mit der Drehachse e. Da a_{12}' windschief zu e ist, gibt es höchstens zwei Punkte, wo a_{12}' das Bild $a_{34}'\varkappa$ bei einer geeigneten Drehspiegelung mit den Fixelementen E, e, ε schneiden könnte.
Bei $\eta = \zeta + 2 = 0$ liegt $a_{34}'\varkappa$ auf einem Drehzylinder, der von der Geraden a_{12}' zweimal geschnitten wird. Der Fall $E = O$ ist bereits bei (iii) a mitbehandelt.
Die zweite Möglichkeit aus (iii) b verhält sich wieder völlig analog.
Nun bleibt zu zeigen, dass die zu (iii) b gehörigen zulässig schneidenden Lagen von **T** alle schon mit Satz 1 erfasst sind: Bei den im Abschnitt 2 genannten Geradenspiegelungen δ, deren Achsen Erzeugende des Konoids Γ' aus (5) sind, schneiden die Geraden a_{13}', a_{14}', a_{23}', a_{24}' die Bilder $a_{23}'\delta$, $a_{24}'\delta$, $a_{13}'\delta$, $a_{14}'\delta$ (vgl. Abb. 1 a). Die gemäss (i) zugehörige Bewegung $\varkappa$ ist darstellbar als $\varkappa = \delta\beta = \sigma\delta$; dabei ist $\beta \in \mathscr{G}$ die $A_1'\delta$ mit $A_2'\delta$ vertauschende Ebenenspiegelung; σ ist die Ebenenspiegelung an der Symmetrieebene ε_{12} von A_1' und A_2'.
Die Achse d von δ ist niemals normal zu ε_{12}; d liegt nur dann in ε_{12}, wenn δ die Tetraedermitte O fixlässt, und das liefert die Lage $\mathbf{T}^0$. Bis auf diesen Fall ist $\varkappa$ eine nichtinvolutorische Drehspiegelung mit $d \cap \varepsilon_{12}$ als einzigem Fixpunkt. Alle diese Fixpunkte bilden die um O verminderte Hyperbel in $x = 0$ aus (iii) b, wie man auch anhand (5) bestätigen kann.
Die restlichen axialen Umschwünge liefern in analoger Weise nichtinvolutorische Drehspiegelungen, deren Fixpunkte auf genau einer der Hyperbeln aus (iii) b liegen. Nach Satz 3 gibt es ausser $\mathbf{T}^0$ keine gemeinsame Lage von **T** bei verschiedenen Umschwüngen. Damit sind alle nach (iv) möglichen Lagen erfasst.

Satz 4: *Ausser den Lagen des Gangtetraeders, die mit den axialen Umschwüngen aus Satz 1 und den zweiparametrigen symmetrischen Rollungen aus Satz 2 erreicht werden, gibt es keine* **T**′ *zulässig schneidenden mehr.*

H. Stachel, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 Blaschke W.: *Kinematik und Quaternionen* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960).
2 Krames J.: *Über Fusspunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I).* Monatsh. Math. Phys. *45*, 394–406 (1937).
3 Tarnai T. and Makai E. jr.: *A Movable Pair of Tetrahedra.* Im Druck.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/88/030065-11$1.50+0.20/0

A new geometric inequality

Let $\omega \in (0, \pi)$ be defined by the equation

$$\cot \omega = \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cot \alpha_3 \tag{1}$$

where α_1, α_2, α_3, are positive numbers satisfying

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi . \tag{2}$$

If α_1, α_2 and α_3 are interpreted as the three angles of a triangle (T), then ω is called the Brocard angle of (T) and there exists a number of identities relating ω and α_1, α_2 and α_3 [4]. This note is concerned with the problem of finding inequalities between ω and α_1, α_2 and α_3. Since the appearance of [1], this problem has received much attention. At present the following inequalities are known [1–3].

$$2\omega \leqq \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\pi}{3} . \tag{3}$$

This is the oldest known inequality and follows from the inequality $\cot^2 \omega \geqq 3$ which is readily obtained from (1). The next inequality is

$$2\omega \leqq \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \tag{4}$$

which was proved in [1]. It is sharper than (3).
In [2] it was shown that

$$\omega^3 \leqq (\alpha_1 - \omega)(\alpha_2 - \omega)(\alpha_3 - \omega) , \tag{5}$$

an inequality that implies (4).
Using the method of Lagrange multipliers, Mascioni [5] proved the inequality

$$2\omega \leqq 3 \left(\sum 1/\alpha_i\right)^{-1} . \tag{6}$$

This inequality is sharper than (4), since the harmonic mean of three numbers is less than or equal to their geometric mean. A different proof of (6) appears in [3]. Since