Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1988)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 969. Für reelles $r>2$ bezeichne c_r die grösste der reellen Zahlen c derart, dass für alle reellen a, b mit $a>b>0$ die Ungleichung

$$\sqrt{ab}\left(1+c\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^r\right)\leqq\frac{a+b}{2}$$

gilt. Man bestimme c_r. H.-J. Seiffert, Berlin (W)

Lösung:

Mit $x=\dfrac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$, $0<x\leqq 1$ schreibt sich die Ungleichung wie folgt:

$$x\,[1+c(1-x^2)^{\frac{r}{2}}]\leqq 1 \quad\Leftrightarrow\quad c\leqq f(x)=\frac{1-x}{x(1-x^2)^{\frac{r}{2}}}=\frac{1}{x(1+x)(1-x^2)^{\frac{r}{2}-1}}.$$

Daraus folgt:

$$c_r=\min f(x)=f(x_r) \quad\text{mit}\quad x_r=\frac{1+\sqrt{1+4r}}{2r}. \tag{1}$$

Bemerkung:

Für $r=2$ ist $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x)}$. Diese Funktion erhält im Bereich $x\in(0,1]$ ein Randminimum bei $x=1$, daher ist $c_2=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$.

Zufälligerweise liefert (1) auch in diesem Fall die richtigen x_r- und c_r-Werte:

$$x_2=\frac{1+\sqrt{9}}{4}=1, \qquad c_2=\tfrac{1}{2}.$$

G. Bercea, München, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), J. Schaer (Calgary, CD), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden). Teillösungen von L. Kuipers (Sierre), P. Weisenhorn (Achern, DDR).

Aufgabe 970. Die Polynomfolge (P_n) sei rekursiv definiert durch

$$P_0 = 1, \quad P_{n+1}(z) = z(P_n(z) + P_n'(z)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Man gebe $P_n(z)$ in geschlossener Form an und zeige, dass alle Nullstellen von P_n reell und nicht positiv sind.

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung mit Verallgemeinerung:

Die Polynomfolge (P_n) sei rekursiv definiert durch

$$P_0 = 1, \quad P_{n+1}(z) = z(P_n(z) + m P_n'(z)), \quad z \in C, \quad n \in N_0, \quad m \in N .$$

Die geschlossene Darstellung lautet

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} m^{n-k} S(n, k) z^k ,$$

wobei $S(n, k)$ die Stirling-Zahlen 2. Art bedeuten.
Zum Beweis leitet man aus dem Ansatz

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a(n, k) z^k$$

mit Hilfe der Polynomrekursion die Relationen $a(n, 1) = m a(n-1, 1)$, $a(n, n) = a(n-1, n-1)$ und $a(n, k) = a(n-1, k-1) + m k a(n-1, k)$ her $(2 \leq k \leq n-1)$.
Aus $a(1, 1) = 1$ folgen $a(n, 1) = m^{n-1} = m^{n-1} S(n, 1)$ und $a(n, n) = 1 = m^{n-n} S(n, n)$.
Schliesslich zeigt

$$m^{n-1-(k-1)} S(n-1, k-1) + k m^{1+n-1-k} S(n-1, k)$$
$$= m^{n-k}(S(n-1, k-1) + k S(n-1, k)) = m^{n-k} S(n, k),$$

dass die Zahlen $m^{n-k} S(n, k)$ die Rekursion der Zahlen $a(n, k)$ erfüllen. Da die Randwerte der Folgen übereinstimmen, folgt $a(n, k) = m^{n-k} S(n, k)$.
Die Polynome $P_n(z)$ können keine positiven reellen Nullstellen haben, da ihre Koeffizienten alle positiv sind. Wir weisen nach, dass die reellen Polynome $P_n(x)$ $(x \in R)$ n verschiedene reelle (und somit nicht positive) Nullstellen haben; das sind dann auch alle Nullstellen von $P_n(z)$ $(z \in C)$.
Zum Nachweis ziehen wir die Funktionen $f_n(x) = e^{x/m} P_n(x)$ bei, welche die selben Nullstellen wie $P_n(x)$ haben. Sie gehorchen der Rekursion $f_n(x) = m x f_{n-1}'(x)$, $(n \geq 1)$. Wir setzen für $n \geq 2$ induktiv voraus, f_{n-1} habe $n-1$ verschiedene reelle Nullstellen. Wegen $\lim_{x \to -\infty} f_{n-1}(x) = 0$ und dem Satz von Rolle hat f_{n-1}' $n-1$ verschiedene negative Nullstellen.

Die Rekursion zeigt, dass dann f_n n verschiedene nicht positive reelle Nullstellen hat. Der Beweis schliesst mit der Bemerkung, dass f_1 genau die eine Nullstelle 0 hat.

Chr. A. Meyer (Ittigen) und J. C. Binz (Bolligen)

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), R. Wyss (Flumenthal, 3 Lösungen).

Aufgabe 971. $\bar{\mathbb{Q}}$ bezeichne den Körper aller komplexen algebraischen Zahlen, $\bar{\mathbb{Q}}^* := \bar{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$. Seien nun $p_0, \ldots, p_n \in \bar{\mathbb{Q}}$, $p_n \neq 0$ und u eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung

$$p_0 u^{(n)} + \ldots + p_n u = 0.$$

Seien weiter $u(0), \ldots, u^{(n-1)}(0)$, $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$, $\alpha \neq 0$. Man zeige für alle $j = 0, 1, \ldots$:

(1) $u^{(j)}(\alpha) \notin \bar{\mathbb{Q}}^*$,

(2) $u^{(j)}(\alpha) \notin \bar{\mathbb{Q}}$, falls überdies $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$.

LITERATURVERZEICHNIS

1 Murty, M. R. and Murty, V. K.: Irrational numbers araising from certain differential equations. Canad. Math. Bull. *20* (1), 117–120 (1977).
2 Niven, I.: Irrational numbers. Carus Math. Monographs 11, J. Wiley & Sons, 1956.
3 van der Poorten, A. J.: Some determinants that should be better known. J. Austral. Math. Soc. Ser. A *21*, 278–288 (1976).

P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung des Aufgabenstellers

Lösung: Da u nicht trivial sein soll, ist zunächst $n \geq 1$ und $p_0, \ldots, p_{n-1}$ können nicht sämtliche verschwinden; o.B.d.A. sei $p_0 \neq 0$. Ist $p_0 X^n + \ldots + p_n = p_0 \prod_{k=1}^{m} (X - \lambda_k)^{g_k}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_k \notin \bar{\mathbb{Q}}^*$ und $g_1 + \ldots + g_m = n$, so ist $u(z) = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) \exp(\lambda_k z)$ mit Polynomen P_k eines Grades höchstens $g_k - 1$. Wegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $u(0), \ldots, u^{(n-1)}(0) \in \bar{\mathbb{Q}}$ und dem verallgemeinerten Vandermondeschen Satz (vgl. etwa [2], p. 282/3) sind die Koeffizienten aller P_k aus $\bar{\mathbb{Q}}$. Aus

$$u^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda_k^{j-i} P_k^{(i)}(z) \right) \exp(\lambda_k z) \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots$$

kann mit der Festsetzung $\lambda_0 := 0$ auf

$$0 = \beta_0 e^{\lambda_0 \alpha} + \beta_1 e^{\lambda_1 \alpha} + \ldots + \beta_m e^{\lambda_m \alpha} \tag{1}$$

geschlossen werden, wobei gilt

$$\beta_0 := -u^{(j)}(\alpha) \quad \text{und} \quad \beta_k := \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda_k^{j-i} P_k^{(i)}(\alpha), \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Wegen $\alpha \neq 0$ sind die Exponenten in (1) paarweise verschieden und algebraisch; die $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sind ebenfalls algebraisch. Macht man für 1) die Annahme in $u^{(j)}(\alpha) \in \bar{\mathbb{Q}}^*$ für ein $j \geq 0$, so ist $\beta_0 \in \bar{\mathbb{Q}}^*$ wegen (2) und die Gleichung (1) widerspricht dem Satz von Lindemann-Weierstraß (vgl. etwa [1], p. 117).
Ist $p_1 = \ldots = p_{n-1} = 0$, so ist $p_0 \neq 0$ und man hat $m = n$ und alle $g_1, \ldots, g_n$ gleich 1, weshalb sich die P_k auf algebraische Konstanten reduzieren, die nicht sämtliche verschwinden. Nach (2) ist daher $\beta_k = \lambda_k^j P_k$ für $k = 1, \ldots, n$; wegen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$ verschwinden diese nicht alle und die Annahme $u^{(j)}(\alpha) \in \bar{\mathbb{Q}}$ führt nun auch im Falle 2) via (1) zu einem Widerspruch.

Aufgabe 972. Für natürliche Zahlen n beweise man

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} < (1 + 1/n)^{n/2}.$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Lösung: Aus der Lösung von Aufgabe 956 (El. Math. *43* (1988) 26) folgt zunächst

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2} \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{n}{n + 6/\pi^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Weiter folgt, wegen der trivialen Ungleichungen

$$\frac{\pi^2}{6} \frac{n}{n + 6/\pi^2} \leq e^{1/2} \frac{n}{n + 6/\pi^2} \leq e^{1/2} \frac{n}{n + 1/4} \leq e^{1/2} \left[\frac{n}{n+1}\right]^{1/4},$$

dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} < e^{1/2} \left[\frac{n}{n+1}\right]^{1/4}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Aufgabe wird somit mit Hilfe der bekannten Ungleichung

$$e^{1/2} \left[\frac{n}{n+1}\right]^{1/4} \leq \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n/2}$$

gelöst (vgl. D. S. Mitrinović, Analytic Inequalities, 3.6.3).

V. D. Mascioni, Origlio

Bemerkung der Redaktion: H.-J. Kanold (Braunschweig, BRD) beweist folgende Verschärfung: Bezeichnet man die linke Seite der gegebenen Ungleichung mit $f(n)$, so gilt

$$f(n) < \left(1 + \frac{1}{n+0.9}\right)^{n/2} \quad \text{für} \quad n \geq 40,$$

$$f(n) < \left(1 + \frac{1}{n+0.8}\right)^{n/2} \quad \text{für alle } n.$$

Nach H.-J. Seiffert (Berlin) gilt

$$f(n) < \frac{\pi^2}{6\sqrt{e}}(1+1/n)^{n/2},$$

wobei die Konstante $\pi^2/(6\sqrt{e}) \approx 0.997703$ bestmöglich ist.

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), P. Bracken (Toronto, CD), F. Götz (Jena, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), S. Nanba (Okayama, Japan), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Streckeisen (Zürich), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1989* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 993. Man beweise oder widerlege: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es unendlich viele natürliche Zahlen k derart, dass

$$S(m,k) := m + (m+1) + \ldots + (m+k-1)$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 994. $\sigma'(n)$ bezeichne die Summe aller quadratfreien Teiler der natürlichen Zahl n. Genau für welche n gilt $n \mid \sigma'(n)$?

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Aufgabe 995. Auf wieviele Arten kann man aus einer n-elementigen Menge U zwei nichtleere disjunkte Teilmengen auswählen?

M. Jeger, Zürich

Aufgabe 996. Für natürliche Zahlen n sei

$$f(n) := \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} \cdot 2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]-i},$$

$$g(n) := \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)\cdot \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right) + (\sqrt{2}-1)\cdot \sin\left(n\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Dann gilt:

$$f(n) = g(n) \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Dies ist zu zeigen.

K.-G. Warneke, Vechta, BRD

Literaturüberschau

H. Koch: Einführung in die klassische Mathematik I: Vom quadratischen Reziprozitätsgesetz bis zum Uniformisierungssatz. 326 Seiten, 25 Abbildungen, DM 68,–. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo 1986.

Ziel des zweibändigen Werkes ist es, diejenigen klassischen Ergebnisse der Mathematik des 19. Jhd. und der ersten Hälfte des 20. Jhd. darzustellen, die von größtem Einfluß auf die moderne Strukturentheorie der gegenwärtigen Mathematik gewesen sind, und welche heute ungefähr dem klassischen Stoff einer Hochschulausbildung in Mathematik ausmachen. Der vorliegende erste Band behandelt (in 30 Kapiteln) im wesentlichen die Mathematik des 19. Jhd., wobei sich der Stoff um die zentralen Arbeiten von Gauss, Galois, Riemann und Dedekind gruppieren läßt. Die Darstellung folgt in etwa der historischen Entwicklung und führt von Gauss' „Disquisitiones arithmeticae" (1801) bis zu Weyls „Idee der Riemannschen Fläche" (1913). Vorausgesetzt zum Verständnis wird eine etwa zweijährige Hochschulausbildung. Die wesentlichen Grundbegriffe sind aber am Schluß des Buches in Anhängen zusammengestellt. Das ausgezeichnete Buch sei jedem empfohlen, der die moderne Mathematik von ihrer Entwicklung her verstehen möchte, ohne daß er die klassischen Werke selbst zur Hand zu nehmen braucht.

G. Frei

G. Cornell, J. H. Silverman: Arithmetic Geometry. XV und 353 Seiten, 5 Figuren, DM 48,–. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1986.

Das Buch besteht im wesentlichen aus erweiterten Fassungen von Unterrichtsvorträgen (vom 30. Juli bis 10. August 1984 an der Universität Connecticut in Storrs gehalten), welche dem tieferen Verständnis der Endlichkeitssätze von Faltings golten, die zum Beweise der Vermutungen von Schafarewitsch, Tate und Mordell geführt hatten. In einem ersten kurzen Kapitel zeichnet Faltings grob die Entwicklung der Ideen, die den Beweisen dieser drei Vermutungen vorausgegangen waren. Anschließend folgt eine Übersetzung ins Englische durch E. Shipz dieser grundlegenden Arbeit von Faltings: Endlichkeitssätze für Abelsche Varietäten über Zahlkörpern (1983). Die Übersichtsvorträge behandeln die Kernpunkte der Faltingschen Arbeit im einzelnen: Gründliche Einfüh-