Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

c) Nach einer Mitteilung von E. Domkowitsch gilt folgender

Zusatz: *Werden in Satz 1 alle drei Aufsatzdreiecke untereinander gleichsinnig ähnlich gewählt, d.h. haben diese bei A_i stets den Innenwinkel β_i für $i = 1, 2, 3$ (Abb. 1 zeigt diese Annahme), so gehen alle drei Verbindungsgeraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durch den Punkt A_0.*

Beweis: Die Dreiecke $A_1 B_2 A_2$ und $A_1 A_3 B_3$ sind einander gleichsinnig ähnlich, weil sie im Innenwinkel bei A_1 und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. Da die Geraden $A_1 B_2$ und $A_1 A_3$ den Winkel β_1 einschließen, gilt dies auch für die Seiten $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$. Nach dem Peripheriewinkelsatz schneiden die beiden Seiten einander auf den Umkreisen der zwei Aufsatzdreiecke durch A_1. Also liegt A_0 auf $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ und analog auf $A_1 B_1$.
Im Sonderfall $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 60°$ ergibt sich abermals eine bekannte Teilaussage des Satzes von Napoleon (vgl. [1]).

H. Stachel, TU Wien

LITERATUR

1 Coxeter H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag, Basel 1963.
2 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte *34*, 256–268 (1987).
3 Schütte K.: Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. El. Math., Vol. *44*, 133–138 (1989).

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/05125-03 $ 1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 1025. Gegeben ist die diophantische Gleichung

$$(x+y+z+t)^2 = x\,y\,z\,t \tag{1}$$

a) Man beweise, dass (1) unendlich viele Lösungen

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$$

besitzt.
b) Man ermittle alle Lösungen von (1), welche den Nebenbedingungen

$$x \leq y \leq z \leq t, \quad x + y + z \geq t$$

genügen.

J. Sàndor, Jud. Harghita, Rumänien
G. Berger, Tg-Mureş, Rumänien

LITERATURVERZEICHNIS

Hurwitz, A.: Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis. Math. Werke *2*, 410–421 (1933).

Lösung. a) Mit dem Ansatz

$$x = 5 + \frac{u+v}{2}, \quad y = 5 + \frac{u-v}{2}, \quad z = 2, \quad t = 3$$

erhält man die Pell'sche Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 150.$$

Ausgehend von $(u_1, v_1) = (15{,}5)$ ergeben sich mittels der Rekursion

$$u_{n+1} = 2u_n + 3v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n$$

unendlich viele Lösungen (u, v) mit ungeraden u, v und somit unendlich viele Lösungen von (1).

b) Das Problem ist äquivalent mit der Bestimmung aller Sehnenvierecke (incl. Dreiecke) mit ganzzahligen Seitenlängen $a > 0, b > 0, c > 0, d \geq 0$ und jeweils gleicher Umfangs- und Flächenmasszahl. Dazu setze man $s = (x + y + z + t)/2$ sowie

$$a = s - x, \quad b = s - y, \quad c = s - z, \quad d = s - t.$$

Die Lösung dieser Aufgabe ist bekannt (s. Problem E 2557, gestellt von R. D. Nelson, Lösung von O. P. Lossers, The American Mathematical Monthly vol. 84. (1977), p. 136–137) und der folgenden Tabelle zu entnehmen:

x	y	z	t	a	b	c	d
1	5	24	30	29	25	6	0
1	6	14	21	20	15	7	0
1	8	9	18	17	10	9	0
2	3	10	15	13	12	5	0
2	4	6	12	10	8	6	0
1	9	10	10	14	6	5	5
2	5	5	8	8	5	5	2
3	3	6	6	6	6	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Eine weitere Lösung sandte P. Weisenhorn, (Achern, BRD).

Aufgabe 1026. a und b seien positive reelle Zahlen mit $a \neq b$, r sei beliebig reell. Man zeige:

a) Ist $r(r-1)(2r-1)<0$, so gilt

$$\frac{a^r+b^r}{a^{r-1}+b^{r-1}} < \left(\frac{a^{2r-1}+b^{2r-1}}{2}\right)^{1/(2r-1)} \tag{1}$$

b) Ist $r(r-1)(2r-1)>0$, so gilt (1) mit $>$ statt $<$.

H.-J. Seiffert, Berlin

Solution. For $0<t\leq 1$ let

$$f(t) := \ln(1+t^r) - \ln(1+t^{r-1}) - \frac{\ln((1+t^{2r-1})/2)}{2r-1}.$$

Then

$$f'(t) = \frac{t^{r-2}}{(1+t^r)(1+t^{r-1})(1+t^{2r-1})}\, g(t)$$

where

$$g(t) = (r-1)\,t^{2r} - r\,t^{2r-1} + r\,t - r + 1.$$

Furthermore

$$g'(t) = 2r(r-1)\,t^{2r-1} - r(2r-1)\,t^{2r-2} + r,$$
$$g''(t) = 2r(r-1)(2r-1)(t-1)\,t^{2r-3}.$$

Obviously $f(1)=g(1)=g'(1)=0$. In case a) we see that $g''(t)>0$, $g'(t)<0$, $g(t)>0$, $f'(t)>0$ and therefore $f(t)<0$ for $0<t<1$. In case b) the $<$- and $>$-signs are reversed. The proof is finished by substituting $t=\min(a/b,\, b/a)$ and exponentiation.

Kee-Wai Lau, Hong Kong

Weitere Lösungen sandten A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

Aufgabe 1027. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Mächtigkeiten der folgenden Mengen:

$$A_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_n = 2n,\ 2i \leq x_i \leq x_{i+1} \quad \text{für} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1\},$$
$$B_n := \{(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{N}^{2n} \mid y_{2n} = y_{2n-1} = n,\ i \leq y_{2i-1} \leq y_{2i} \leq y_{2i+1} \quad \text{für} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1\}.$$

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers.

a) In einem $n \times 2n$-Rechteck seien die n Zeilen von unten nach oben und die $2n$ Spalten von rechts nach links numeriert. Jedem n-Tupel $p \in A_n$ ordnen wir eine Rechtecksfärbung zu, indem wir in der i-ten Zeile vom linken Rand aus x_i Einheitsquadrate färben. Jetzt zählen wir die gefärbten Einheitsquadrate spaltenweise. Enthält die j-te Spalte y_j gefärbte Quadrate, so gelten offensichtlich $y_{2n} = n$ und $y_j \geq y_{j-1}$ für $2 \leq j \leq 2n$. Gäbe es ein i mit $y_{2i-1} < i$, so wäre $x_{n-i} < 2(n-i)$, was wegen $p \in A_n$ nicht möglich ist. Deshalb gilt $i \leq y_{2i-1}$ für $i = n, n-1, \ldots, 1$. Der von p induzierten Rechtecksfärbung entspricht somit eindeutig ein $2n$-Tupel $q = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) \in B_n$.
Umgekehrt ordnen wir jedem $q \in B_n$ eine Rechtecksfärbung zu, indem wir in der j-ten Spalte vom oberen Rand aus y_j Einheitsquadrate färben. Wie oben erhält man jetzt durch Zählen nach Zeilen eindeutig ein $p \in A_n$. Diese bijektive Zuordnung beweist card $A_n =$ card B_n.
b) Das Rechteck habe in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Ecken $(0,0)$, $(2n,0)$, $(2n,n)$, $(0,n)$. Der untere Rand des gemäss a) gefärbten Gebiets ist dann ein minimaler Gitterweg von $(0,0)$ nach $(2n,n)$, der die Gerade $y = \frac{x}{2}$ nicht überschreitet. card A_n ist deshalb die Anzahl solcher Gitterwege, also

$$\operatorname{card} A_n = \operatorname{card} B_n = \binom{3n}{2n} - 2\binom{3n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{2n}.$$

Weitere Lösungen sandten O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1991* and *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1043. Es bezeichne u_n bzw. U_n den Umfang eines dem Kreis mit Radius r und Umfang U ein- bzw. umbeschriebenen regulären n-Ecks ($n \geq 3$). Mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei ferner

$$T_n = \alpha\, u_n + \beta\, U_n.$$

Man zeige:
1. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^2(U_n - U) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} n^2(U - u_n) = \tfrac{2}{3}\pi^3 r.$$

2. Unter allen Folgen (T_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = U$ hat jene mit

$$T_n = \tfrac{2}{3} u_n + \tfrac{1}{3} U_n$$

die grösste Konvergenzordnung, und zwar gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^4(T_n - U) = \tfrac{1}{10}\pi^5 r.$$

W. Moldenhauer, Erfurt, DDR

Aufgabe 1044.
Die n Karten eines Stapels S_0 seien von oben nach unten von 1 bis n numeriert. Wir bilden zwei neue Stapel L_1 und R_1, indem wir aus S_0 von oben beginnend abwechslend eine Karte nach links und $s-1 \geq 1$ Karten nach rechts legen, bis S_0 abgebaut ist. Wir legen R_1 weg und verfahren mit $S_1 = L_1$ wie mit S_0. Der Abbau wird solange wiederholt, bis $S_t = L_t$ genau eine Karte enthält; ihre Nummer sei $f(n)$.
Für welche Werte von n wird $f(n) = 1$?

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1045. $p \geq 7$ sei eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$. Für Elemente x, y des Primkörpers $Z/(p)$ der Charakteristik p gelte $R(x, y)$ genau dann, wenn $x - y$ quadratischer Rest in $\mathbb{Z}/(p)$ ist, d.h. wenn es $u \in \mathbb{Z}/(p)$ mit $x - y = u^2 \neq 0$ gibt.
Man zeige, dass zu je zwei verschiedenen $x, y \in \mathbb{Z}/(p)$ genau n verschiedene $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}/(p)$ mit $R(x, z_i)$ und $R(y, z_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ existieren.

K. Schütte, München, BRD

Literaturüberschau

B. Huppert: Angewandte Lineare Algebra. VIII und 646 Seiten, DM 198,–. de Gruyter, Berlin, New York 1990.
Lineare Algebra wird im ersten Studienjahr unterrichtet, doch erscheint sie, zum Teil in weiterentwickelter Form, in zahlreichen Gebieten der höheren Mathematik. Das vorliegende Buch setzt, nach einer kurzen Zusammenfassung der Grundbegriffe und einer ausführlichen Darstellung der Jordanschen Normalform und ihres Umfeldes in Kapitel I, dort ein, wo eine Anfängervorlesung üblicherweise aufhört. In vier grossen Kapiteln, die weitgehend unabhängig voneinander gelesen werden können, stellt der Autor vier Sachgebiete vor, in denen wesentliche Resultate der linearen Algebra Anwendung finden, und die ihrerseits auch ausserhalb der Mathematik von Bedeutung sind.
Kapitel II handelt von endlichdimensionalen normierten Vektorräumen (speziell Hilberträumen) über dem reellen oder komplexen Zahlkörper. Einige allgemeine Abschnitte führen bis zum Ergodensatz für stochastische Matrizen. Das Hauptstück des Kapitels bildet die Theorie der normalen, hermiteschen und unitären Endomorphismen von Hilberträumen, insbesondere deren Spektraltheorie. Vieles ist so angelegt, dass es sich auf den Fall unendlicher Dimension übertragen lässt. Hier aber wird dem Leser das algebraische Gerüst der Funktionalanalysis vor Augen geführt.