Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Lemma 4. *Let the norm $\| \ \|$ on E be such that every one-dimensional linear subspace has an orthogonal complement. Then, for $x, y \in S(E, \| \ \|)$ with $x \neq \pm y$ the reflection $\varrho = \varrho_F$ in the orthogonal complement $F = \mathbb{R}(x-y)^{\perp}$ maps x to y.*

Proof: Let $z := x - y$ and consider the decompositions

$$x = a + \lambda z \quad \text{and} \quad y = b + \mu z \text{ with } a, b \in F \text{ and } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

The uniqueness of the orthogonal decomposition implies $a = b \neq 0$ and $\lambda - \mu = 1$. Moreover, a and z must be linearly independent.
Now $\varrho(x) = a - \lambda z$, and in order to show $\varrho(x) = y$ we have to show $\mu = -\lambda$ or simply $|\mu| = |\lambda|$. So let us suppose $|\lambda| \neq |\mu|$. Then there are at least three different points among $a \pm \lambda z$ and $a \pm \mu z$, and all these points lie on the same line and have the same norm, namely $\| a \pm \lambda z \| = \| a \pm \mu z \| = 1$. By the convexity of the norm, we have also $\| a \| = 1$, and by Lemma 3, for $0 < \alpha < \max\{|\lambda|, |\mu|\}$, the linear subspace $\mathbb{R}(a + \alpha z)$ has no orthogonal complement in the plane spanned by a and z. This is a contradiction to the hypothesis, because an orthogonal complement in E would intersect this plane in a line orthogonal to $\mathbb{R}(a + \alpha z)$.
Now we can achieve the proof of Theorem 2:

Proof of Theorem 2, second part: In order to apply Theorem 1, we shall prove that the group of isometries $Iso(E, \| \ \|)$ acts transitively on the unit sphere $S(E, \| \ \|)$. So let $x, y \in S(E, \| \ \|)$. If $x = \pm y$, there is no problem to construct an isometry mapping x to y; else Lemma 4 tells us that the reflection in the orthogonal complement of the line $\mathbb{R}(x - y)$ is such an isometry.

H. Rummler, Institut de Mathématiques de l'Université de Fribourg

REFERENCES

1 Greub, W., Halperin, S., and Vanstone, R.: Connections, Curvature and Cohomology, vol. II, Academic Press, New York and London, 1973.
2 Huppert, B.: Angewandte Lineare Algebra, Walter de Gruyter, Berlin and New York, 1990.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/91/040111-05$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 1034. Unter einem perfekten Quader versteht man einen Quader mit ganzzahligen Seiten s_i, ganzzahligen Flächendiagonalen f_i $(i = 1, 2, 3)$ und ganzzahliger Raumdiagonale r. Man zeige: Für perfekte Quader gilt

$$s_1 s_2 s_3 f_1 f_2 f_3 r \equiv 0 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 37}.$$

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Solution. Let $\mathbb{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 37\}$, the set of the ten primes in question. Then for all $p \in \mathbb{P}$ we have to show that at least one out of the seven squares

$$s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_1^2 + s_2^2, s_2^2 + s_3^2, s_1^2 + s_3^2, s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

is $\equiv 0 \pmod{p}$. Let S_p be the set of all nonzero quadratic residues mod p. Then we have to show that

$$x, y, z, x + y, y + z, z + x \in S_p \Rightarrow x + y + z \notin S_p, \tag{1}$$

where addition is mod p. Since $z^{-1} S_p = S_p$ for all $z \in S_p$, we may suppose w.l.o.g. that $z = 1$ in (1). This is equivalent to the following property (2) of the set

$$T_p := \{x \in \mathbb{Z}_p \mid x \in S_p, x + 1 \in S_p\},$$

namely

$$x, y \in T_p \Rightarrow x + y \notin T_p. \tag{2}$$

It remains to calculate T_p for all $p \in \mathbb{P}$ and to verify (2), see the list below. In passing we note that for $p \equiv 1 \pmod 4$, we have

$$x \in T_p \Leftrightarrow p - x - 1 \in T_p.$$

p	T_p
2, 3, 5	$\emptyset$
7	$\{1\}$
11	$\{3, 4\}$
13	$\{3, 9\}$
17	$\{1, 8, 15\}$
19	$\{4, 5, 6, 16\}$
29	$\{4, 5, 6, 22, 23, 24\}$
37	$\{3, 9, 10, 11, 25, 26, 27, 33\}$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten Con Amore Problemgruppe (Copenhagen, DK), P. Hohler (Olten), W. Janous (Innsbruck, A), K. Schütte (München, BRD).

Aufgabe 1035. Es seien n Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt M gegeben. Je zwei im positiven Drehsinn aufeinanderfolgende Strahlen schliessen Winkel $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ein. Unter welchen Bedingungen sind die Trägergeraden der gegebenen Strahlen die Mittelsenkrechten der Seiten eines n-Ecks?

W. Moldenhauer, K. Wetwischka, Erfurt, BRD

Lösung. Das gesuchte n-Eck habe die Eckpunkte $B_1, \ldots, B_n$. Diese liegen dann sämtlich auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Nehmen wir an, dass das n-Eck konvex ist, und dass $\beta_i := \sphericalangle B_i M B_{i+1}$ (Indizes mod n), also $\beta_i > 0$ und $\sum_1^n \beta_i = 2\pi$. Dann gilt offenbar

$$\beta_i + \beta_{i+1} = 2\alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{*}$$

Wenn n *ungerade* ist, gibt es genau eine Lösung für (*) und zwar $\beta_i = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_{i+k}$. Die Winkel α_i müssen also den Bedingungen $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_{i+k} > 0$ $(1 \le i \le n)$ genügen. Wenn n *gerade* ist, so sind die Gleichungen (*) abhängig oder unerfüllbar, je nachdem $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i$ verschwindet oder nicht.
Im ersten Fall gibt es eine positive Lösung für β_i genau dann, wenn

$$\operatorname{Max}\left\{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4, \ldots, \sum_1^n (-1)^{j-1} \alpha_j\right\} < \operatorname{Min}\left\{\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \ldots, \sum_1^{n-1} (-1)^{j-1} \alpha_j\right\}.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), A. Müller (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil).

Aufgabe 1036. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ paarweise von einander verschiedene reelle Zahlen mit

$$m = \min_{1 \le i \le n} x_i < 0 < \max_{1 \le i \le n} x_i = M.$$

Wenn mit $A(x)$ bzw. $A(x^2)$ das arithmetische Mittel von $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $x_1^2, \ldots, x_n^2$ bezeichnet wird, dann gilt für $n \ge 3$:

$$m + \frac{n}{m(n-1)}\left[(A(x))^2 - \frac{1}{n}A(x^2)\right] < 2A(x) < M + \frac{n}{M(n-1)}\left[(A(x))^2 - \frac{1}{n}A(x^2)\right].$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Solution. Without loss of generality we may assume that

$$m = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = M.$$

The first inequality of the problem is equivalent to

$$(n-1)nm^2 + (x_1 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2(n-1)m(x_1 + \ldots + x_n) > 0$$

or

$$\sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (m - x_i)(m - x_j) > 0,$$

which is clearly true.
Similarly the second inequality of the problem is equivalent to

$$(n-1)\,n\,M^2 + (x_1 + \ldots + x_n)^2 - (x_1^2 + \ldots + x_n^2) - 2(n-1)\,M(x_1 + \ldots + x_n) > 0$$

or

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (M - x_i)(M - x_j) > 0,$$

which is again clearly true.

Kee-Wai Lau, Hong Kong

Bemerkung von W. Janous (Innsbruck, A):
In [1], p. 19, Nr. 103, findet sich eine ähnliche Ungleichung, nämlich: Für $n \geq 3$ und $m + M > 0$ gilt

$$A(x) > (A(x^2) + m\,M)/(m + M).$$

LITERATUR

[1] Österreichische Mathematik-Olympiaden (1970–1989). Hrsg. G. Baron und E. Windischbacher. Innsbruck 1990.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), H.-J. Seiffert (Berlin, BRD), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1992* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

Aufgabe 1052. An die Seiten eines Dreiecks ABC werden gleichschenklige ähnliche Dreiecke BA_1C, CB_1A, AC_1B mit den Spitzen A_1, B_1, C_1 angesetzt, alle nach aussen oder alle nach innen. Es seien $a_1 = B_1C_1$, $b_1 = C_1A_1$, $c_1 = A_1B_1$ die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Um A, B, C werden die Kreise mit den Radien a_1, b_1, c_1 gezeichnet. Man zeige, dass das Potenzzentrum dieser drei Kreise auf der Eulergeraden des Dreiecks ABC liegt.

R. Stärk, Schaffhausen

Aufgabe 1053. Auf einer Geraden G wähle man zwei Punkte P_1 und P_2 im Abstand $2d$. Zwei Kreisbogen B_1, B_2 mit Zentren P_1, P_2 und gleichem Radius $r > d$ bestimmen zusammen mit G ein Spitzbogendreieck D.
D werde eine Kreisfolge (K_n) wie folgt eingeschrieben:
K_1 berührt G, B_1 und B_2; K_n berührt K_{n-1}, B_1 und B_2 $(n \geq 2)$. Man berechne den Radius r_n von K_n als Funktion von d, r und n.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1054. Gegeben sei eine Ellipse und zwei ihr einbeschriebene konvexe Vierecke, deren Diagonalen durch einen Punkt verlaufen und sich gegenseitig trennen. Man beweise, dass die Seiten der beiden Vierecke ein und dieselbe Ellipse berühren.

G. Unger, Dornach

Literaturüberschau

D. Jungnickel: Graphen, Netzwerke und Algorithmen. Zweite überarbeitete und erweiterte Auflage, 440 Seiten, 120 Figuren, DM 68,–. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1990.
Diskretisierende Lösungsansätze in verschiedenen Zweigen der Mathematik haben in den letzten 30 Jahren das Interesse an kombinatorischen Schlussweisen stark gefördert. Zugleich ist man in der gleichen Zeitspanne in Wirtschaft und Technik auf zahlreiche Probleme gestossen, die schon von der Fragestellung her der Kombinatorik zugewiesen werden müssen; auch sie haben die intensive Forschungstätigkeit in einzelnen Zweigen der Kombinatorik mitgeprägt. So haben z. B. kombinatorische Optimierungsprobleme geradezu eine stürmische Entwicklung in der Graphentheorie ausgelöst. Fast immer sind diese Aufgaben aus der Praxis bezüglich Rechenaufwand von einer Grössenordnung, bei der man auf einen leistungsfähigen Computer angewiesen ist. Dies erklärt, dass der algorithmische Aspekt in der Graphentheorie erst relativ spät miteinbezogen worden ist.
Das vorliegende Buch befasst sich mit dem graphentheoretisch formulierbaren Teil der kombinatorischen Optimierung. Es ist aus zwei Vorlesungen entstanden, die Jungnickel im Studienjahr 1984/85 an der Universität Giessen gehalten hat. Die Ausarbeitung zu einem Buch schliesst offensichtlich eine Lücke in der Kombinatorik-Literatur, ist sie doch die erste deutschsprachige Monographie zur algorithmischen Optimierung auf Graphen.
Die anvisierten Themenkreise haben den Autor dazu bewogen, dem Buch einen stark problemorientierten Aufbau zugrunde zu legen. Nach einer kurzen Einführung in die Graphentheorie werden nacheinander die zentralen Optimierungsprobleme mit dem zugehörigen Umfeld an Theoremen und Algorithmen zur Sprache gebracht (optimale Wege, Gerüste und Flüsse in bewerteten Graphen, optimale Paarungen). Der Autor hat dabei auch daran gedacht, dem Leser den Zugang zur meist englisch geschriebenen Original-Literatur zu erleichtern, indem er durchgehend die englischen Bezeichnungen in Klammern beigefügt hat. Bemerkenswert ist die Präsentation der schon klassischen kombinatorischen Sätze von Menger und Hall (Heiratssatz) samt ihrer Umgebung, die Jungnikkel als Sonderfälle der Sätze von Ford und Fulkerson über maximale Flüsse angeht.
Als besonderes Markenzeichen dieses Buches sind die Algorithmen zur Berechnung der jeweiligen Extremal-Figuren anzusehen. Der Autor hat sich also nicht auf die sonst in der Graphentheorie üblichen Existenz- und Struktur-Aussagen beschränkt. Bei den diskutierten Algorithmen hat er sich durchgehend auf eine Beschreibung der wesentlichen Prozeduren festgelegt und diese in einer PASCAL-orientierten Kurzsprache notiert. Auf diese