Bücher und Computersoftware

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **48 (1993)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math. *48* (1993)

0013-6018/93/030128-05$1.50 + 0.20/0
© 1993 Birkhäuser Verlag, Basel

Bücher und Computersoftware

V.I. Arnol'd: Ordinary Differential Equations. 334 Seiten, DM 78.–. Springer-Textbook; Springer Verlag 1992; ISBN 3-540-54183-0.
D.K. Arrowsmith – C.M. Place: Dynamical Systems. 330 Seiten, £ 17.95. Chapman & Hall 1992; ISBN 0-412-39080-9.
J. Hale – H. Koçak: Dynamics and Bifurcations. 568 Seiten, DM 98.–. Texts in Applied Mathematics No 3; Springer-Verlag 1991; ISBN 3-540-97141-6.

Die qualitative Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, heute häufig Theorie der differenzierbaren Dynamischen Systeme genannt, ist eine der bedeutendsten Erfindungen von Henri Poincaré (1854–1912). Die Gründe, welche ihn zu einer neuen Betrachtungsweise führten, und das Gewicht, welches er der neuen Theorie beimass, treten im Vorwort der ersten Arbeit, die Poincaré dem neuen Thema widmete, klar zu Tage [8]:

> Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que, dans la grande généralité des cas qui se présentent, on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeureraient insolubles.
>
> Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement ...
>
> L'étude complète d'une fonction comprend deux parties:
> 1^0 Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction;
> 2^0 Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.
>
> Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation ...
>
> C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant:
>
> *Construire les courbes définies par des équations différentielles.*
>
> Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction ...
>
> D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps: ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps?
>
> Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint

à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

Ich möchte an Hand eines einfachen Beispieles aufzeigen, worin sich die neue Betrachtungsweise von der älteren unterscheidet. Gegeben sei das System von zwei Differentialgleichungen $\dot{x}_1 = x_1$ und $\dot{x}_2 = -x_2$. Die allgemeine Lösung dieses Systems ist $x_1(t) = c_1 e^t$, $x_2(t) = c_2 e^{-t}$, wobei t als reelle oder komplexe Variable betrachtet werden kann; angesichts der grossen Erfolge der komplexen Analysis war um 1880 das zweite der vorherrschende Standpunkt.

Die neue Theorie betrachtet t als reelle Variable und beginnt mit einer geometrischen Deutung des Differentialgleichungssystems und seiner Lösungen: die rechte Seite dieses Systems liefert ein *Vektorfeld* v, nämlich die vektorwertige Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$. Jede Lösung gibt Anlass zu einer Kurve $t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Eine differenzierbare Kurve $t \mapsto x(t)$ ist genau dann eine Lösung des Systems, wenn zu jedem Zeitpunkt t der Geschwindigkeitsvektor $\dot{x}(t)$ der Kurve mit dem Wert des Vektorfeldes v im Punkt $x(t)$ übereinstimmt. Alle Lösungskurven zusammen ergeben das Bild einer Strömung oder eines *Flusses* auf dem Definitionsgebiet des Vektorfeldes. Das Ziel der neuen Theorie ist nun, diesen Fluss qualitativ zu beschreiben.

In unserem Beispiel verlaufen die Strömungslinien auf den Niveaulinien der Funktion $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$, also auf Hyperbeln oder auf den Koordinatenachsen. Im Ursprung befindet sich ein Ruhe- oder Gleichgewichtspunkt der Strömung, denn $v(0) = 0$, auf dem positiven und dem negativen Teil der x_2-Achse strebt die Strömung dem Ursprung zu, auf dem positiven und dem negativen Teil der x_1-Achse fliesst die Strömung vom Ursprung weg, während alle anderen Strömungslinien sich letztendlich dem positiven oder negativen Teil der x_1- Achse asymptotisch annähern und ins Unendliche weglaufen.

Nun zu den Büchern. 1971 publizierte V.I. Arnol'd ein Lehrbuch über gewöhnliche Differentialgleichungen, das sich fast ausschliesslich mit der qualitativen Theorie befasste, was zu jener Zeit unüblich war. Den Hauptgegenstand des Buches bildete das *lokale Verhalten des Flusses, welcher durch ein autonomes Differentialgleichungssystem* $\dot{x} = v(x)$ *erzeugt wird.* Dabei sind $v : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und U ein offenes Gebiet des $\mathbb{R}^n$. Ist x_0 der Punkt von U, in dessen Nähe der Fluss analysiert werden soll, so ergeben sich zwei Fälle. Wenn x_0 keine Nullstelle von v ist, so lässt sich v in der Nähe von x_0 *geradebiegen*; genauer gesagt, gibt es eine offene Umgebung V von x_0 und eine differenzierbare Koordinatentransformation $f : V \xrightarrow{\sim} W$, so dass das Vektorfeld in den neuen Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ konstant ist, also etwa die Form $w : y \mapsto (1, 0, \ldots, 0)$ hat. Die Eigenschaften des Flusses lassen sich in den neuen Koordinaten bequem ablesen, etwa die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von $\dot{y} = w(y)$. Der Beweis der Existenz der neuen Koordinaten stützt sich aber auf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sowie die Tatsache, dass die Lösungen differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängen.

Ist hingegen x_0 eine Nullstelle von v, so studiert man erst den Fluss des in x_0 *linearisierten Vektorfeldes* und versucht dann aus lokalen Eigenschaften des neuen Flusses lokale Eigenschaften des ursprünglichen Flusses zu gewinnen. Der Fluss eines linearen Vektorfeldes $y \mapsto Ay$ lässt sich mit Hilfe der matrixwertigen Exponentialabbildung $t \mapsto e^{At}$ beschreiben; die Untersuchung dieser Abbildung ist ein interessantes Kapitel der Linearen Algebra, welches auf der Theorie der (verallgemeinerten) Eigenräume und der Normalformen einer Matrix beruht. Da die linearen Vektorfelder und ihre Flüsse sehr verschiedenartig aussehen können, liegt es nahe, sich auf einen *generischen Fall* zu beschränken. Diese Beschränkung erreicht man wie folgt: Die Menge $\mathcal{H}$ der Matrizen der Reihenzahl n, welche keinen rein imaginären Eigenwert besitzen, bildet eine offene und dichte Teilmenge des Raumes aller Matrizen der Reihenzahl n. Eine Matrix A ohne rein imaginäre Eigenwerte gibt Anlass zu zwei komplementären Unterräumen W_s, bzw. W_u von $\mathbb{R}^n$: Der Unterraum W_s, bzw. W_u, wird erzeugt von allen verallgemeinerten Eigenräumen von A, deren Eigenwerte negativen, bzw. positiven, Realteil haben. Als Beispiel betrachten wir die Diagonalmatrix $J_s = \mathrm{Diag}(-1, -1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$ mit s negativen und $u = n - s$ positiven Einträgen. Dann sind $W_s = \mathbb{R}^s \times \{0\}$ und $W_u = \{0\} \times \mathbb{R}^u$. Es gilt nun das erstaunliche Resultat, wonach der Fluss von $y \mapsto Ay$ qualitativ wie der Fluss von $x \mapsto J_s x$ aussieht. Genauer gesagt, gibt es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welcher die Linien des Flusses von $y \mapsto Ay$ auf die Linien des Flusses von $y \mapsto J_s y$ abbildet und die Durchlaufsrichtungen der Linien erhält. Die Vektorfelder in $\mathcal{H}$ liefern also nur $n + 1$ qualitativ verschiedene Flüsse. (Dass die Flüsse von $y \mapsto J_s y$ und $y \mapsto J_{s_1} y$ für $s < s_1$ qualitativ verschieden sind, folgt aus Resultaten der Algebraischen Topologie.)

Kehren wir zum nicht-linearen Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^n$ zurück. Es habe in x_0 eine Nullstelle; sei $y \mapsto Ay$ die Ableitung $Dv(x_0)$ von v in x_0. Falls A in $\mathcal{H}$ liegt, falls also A keine rein imaginären Eigenwerte aufweist, nennen wir x_0 *hyperbolisch.* Für eine hyperbolische Nullstelle von v gilt nun der wichtige *Satz von Grobman-Hartman,* wonach der Fluss von v in der Nähe von x_0 qualitativ wie der Fluss von $Dv(x_0)$ in der Nähe von 0 aussieht.

Betrachten wir noch den Fall, bei dem alle Eigenwerte von $Dv(x_0)$ negativen Realteil haben, etwas genauer. Gemäss dem Satz von Grobman-Hartman sowie dem Resultat über lineare Flüsse, sieht der Fluss von v in einer genügend kleinen Umgebung von x_0 qualitativ wie derjenige von $y \mapsto J_n y = -y$ in der Nähe von 0 aus. Der Fluss von $y \mapsto -y$ trägt einen Punkt $\hat{y}$ nach t Zeitschritten nach $e^{-t}\hat{y}$. Somit ist 0 eine *Senke* von $y \mapsto -y$ und daher x_0 eine lokale Senke von v. In Anwendungen sind Senken häufig willkommen; allerdings möchte man dann die Ausdehnung des Einzugsgebietes der Senke genauer kennen. Bei der Antwort auf diese Frage leistet die von A. Liapunow (1857–1918) ersonnene Theorie gute Dienste.

Ich kann nun den Inhalt des Buches von V. Arnol'd genauer umschreiben. Die 1. Auflage von 1971 beschränkte sich auf eine knappe Darstellung einiger Themen der qualitativen Theorie. In der 3. Auflage, die 1984 in Moskau erschienen ist und von der jetzt eine sorgfältige Übertragung ins Englische vorliegt, sind die Themen der alten Auflage etwas ausführlicher dargestellt und durch Abschnitte über Lösungsmethoden für homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung, Anwendungen auf lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung und die Sturmschen Sätze über die Nullstellen von linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung bereichert worden. Vorherrschend ist immer noch der geometrische Anstrich: viele Figuren, anschauliche Überlegungen, wenig Rechnungen. Der Anfang des 1. Kapitels gibt eine kostbare Einführung ab, deren Lektüre ich allen Liebhabern der Differentialgleichungen warm empfehle. In den Kapiteln 2 und 4 kommt das Geradebiegen von Vektorfeldern zur Sprache. Lineare Vektorfelder und ihre Flüsse, sowie die topologische (= qualitative) Klassifikation dieser Flüsse sind Thema des dritten Kapitels; ebenso werden dort die Senken von nichtlinearen Vektorfeldern mit Hilfe der Methode von Liapunow untersucht. Das 5. Kapitel tischt einen Leckerbissen auf: Ich erwähnte schon, der Stil des Buches sei geometrisch, wenig rechnerisch. Insbesondere behandelt Arnol'd schon im 1. Kapitel den Tangentialraum TU_x in einem Punkt x des offenen Gebietes $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie die von $f : U \to V$ induzierte lineare Abbildung $f_* : TU_x \to TV_{f(x)}$ und erklärt, wie sich Lösungen und Tangentenvektoren bei einem Koordinatenwechsel ändern. So kann er im 5. Kapitel auf wenigen Seiten auseinandersetzen, was *Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten* sind. Es reicht sogar zu einer Beschreibung des Indexes einer isolierten Nullstelle eines ebenen Vektorfeldes und einer Beweisskizze des Satzes von Poincaré [8], wonach die Summe der Indizes der Nullstellen eines Vektorfeldes einer geschlossenen Fläche nicht vom Vektorfeld abhängt und mit der Eulerschen Charakteristik der Fläche übereinstimmt.

Nun zum Buch von D.K. Arrowsmith und C.M. Place. Es ist eine Überarbeitung von [1], welche dem "unprecedented popular interest in the chaotic behaviour of discrete dynamical systems" Rechnung tragen möchte. Was das Buch vom eben besprochenen und vielen anderen unterscheidet, ist der Umstand, dass Beweise für die ausgesprochenen Sätze meist weggelassen, die Bedeutung der Sätze aber durch ungewöhnlich viele Beispiele, insbesondere auch Bilder von Phasenporträts, illustriert werden. Auf wenigen Seiten können so die Flüsse der ebenen, linearen Differentialgleichungen und die lokale Analyse der Flüsse von ebenen, nicht-linearen Differentialgleichungen behandelt werden (Abschnitte 2 und 3). Die Tragweite der besprochenen Resultate wird sodann in Abschnitt 5 an umfangreicheren Beispielen aus Mechanik, Elektrotechnik und Biologie zur Schau gestellt.

Der bisher referierte Teil hat sein Gegenstück im Buch von Arnol'd; das Buch von Arrowsmith und Place behandelt aber auch Themen, die bei Arnol'd nicht vorkommen. Da sind zunächst die *globalen Resultate über ebene Differentialgleichungen*, die wir Poincaré [8] und Bendixson [4] verdanken. Ein weiteres Thema geht ebenfalls auf Poincaré zurück, nämlich das *Studium von periodischen Lösungen mittels Abbildungen*. Da diese Methode die Theorie der diskreten Dynamischen Systeme ins Leben rief, möchte ich sie in einem einfachen Fall kurz erklären.

Gegeben sei ein zeitabhängiges Differentialgleichungssystem $\dot{x} = v(x,t)$; das Vektorfeld v sei dabei auf einem Zylinder $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definiert und *periodisch in* t, etwa mit der Periode 1. Das Langzeitverhalten einer Lösung $t \mapsto x(t)$ ist weitgehend durch die Folge von Punkten $k \mapsto x(t_0+k)$ bestimmt, wobei t_0 ein willkürlich gewählter Zeitpunkt ist. Diese Folge lässt sich durch Iteration der Abbildung $P : U \to U$ gewinnen, welche einen Punkt x_0 aus U auf denjenigen Punkt abbildet, in dem sich die Lösung, welche zur Zeit t_0 in x_0 startet, zur Zeit $t_0 + 1$ befindet. Diese Abbildung P ist bijektiv und in beiden Richtungen differenzierbar, also ein Diffeomorphismus. Ein Fixpunkt von P, d.h. ein Punkt x_0 mit $P(x_0) = x_0$, gibt Anlass zu einer periodischen Lösung von $x = v(x,t)$ der Periode 1. Die Suche nach periodischen Lösungen der Periode 1 läuft also auf das Auffinden von Fixpunkten von P hinaus. Falls es zum Beispiel gelingt, eine Kugel $K \subset U$ ausfindig zu machen, die unter P in sich abgebildet wird, so enthält K nach dem Brouwerschen Satz einen Fixpunkt von P; es gibt also eine periodische Lösung, die in K startet.

Das Verhalten der von P produzierten Folgen $k \mapsto P^k(x_0)$ kann sehr kompliziert sein. Wie Poincaré in [9] mit Entsetzen voraussah, kann dies schon eintreten, wenn der Definitionsbereich von P ein ebenes Gebiet ist. Das Studium solch komplizierten Verhaltens ist mit Begriffen wie "homokliner Punkt" und "Smalesche Hufeisenabbildung" verknüpft.

Das Buch von Arrowsmith und Place berührt auch das Thema der *Verzweigungen*. Im Falle der Differentialgleichungen tritt diese Fragestellung bei Familien von Vektorfeldern auf, die von Parametern differenzierbar abhängen; sei etwa $S \subset \mathbb{R}^m$ der Parameterraum und $v : U \times S \to \mathbb{R}^n$ die Familie von Vektorfeldern. Es geht nun darum, die Flüsse der Vektorfelder zu verschiedenen Parameterwerten miteinander zu vergleichen. Treten in jeder Umgebung eines Parameterwertes s_0 qualitativ verschiedene Flüsse auf, so wird s_0 ein *Verzweigungspunkt* der Familie von Vektorfeldern v genannt. Zum Beispiel ist s_0 ein Verzweigungspunkt, wenn $v(-, s_0)$ eine Nullstelle hat, und es eine gegen s_0 konvergierende Folge (s_i) gibt, so dass jedes Vektorfeld $v(-, s_i)$ keine Nullstelle aufweist.

Die erwähnten drei Themen kommen in den Abschnitten 3.9, 4 und 6 zur Sprache. Wieder werden die Begriffe an konkreten Beispielen entwickelt, an welchen auch die ausgesprochenen Resultate illustriert werden. Besonders hervorheben möchte ich die behutsame Art, mit der die Themen eingeführt, und die ausgeklügelte Abfolge, mit der sie vorgetragen werden. Ebenso lobenswert ist die geometrische Darstellung der Ideen, die hinter den Begriffen "homoklines Gewirr", "symbolische Dynamik" und "Smalesche Hufeisenabbildung" stecken.

Beim Anblick des Buches von Hale-Koçak fallen zunächst die reichen Ornamente ins Auge, welche den Umschlag zieren, die verschiedenen Teile des Buches einleiten sowie die Begrüssung, die 18 Kapitel und das Abschiedswort umrahmen. Das Inhaltsverzeichnis bringt die zweite Überraschung. Wie bei Arrowsmith und Place sind differenzierbare Dynamische Systeme, diskrete Dynamische Systeme sowie Verzweigungen, die bei Familien von solchen Systemen auftreten können, die Themen. Das Ungewöhnliche liegt in der Behandlung der Themen nach aufsteigender Dimension des Phasenraumes. Dieser ist in den Teilen I und II eindimensional, in Teil III zweidimensional und im letzten Teil drei- oder vierdimensional. Bedenkt man, dass die Teile I und II gut 160 Seiten und Teil III über 320 Seiten umfassen, während Teil IV knapp 40 Seiten umspannt, so wird deutlich, dass die Autoren sich zur Hauptsache auf die Behandlung von Flüssen und Abbildungen ein- oder zweidimensionaler Phasenräume beschränkt haben. In der Begrüssung begründen sie diese Wahl so:

> in recent years, due primarily to the proliferation of computers, dynamical systems has once more turned to its roots in applications with perhaps a more mature outlook. Currently, the level of excitement and activity, not only on the mathematical front but in almost all allied fields of learning, is unique. It is the aim of our book to provide a modest foundation for taking part in certain theoretical and practical facets of these exiting developments ... It is both our conviction and our experience that many of the fundamental ideas of dynamics and bifurcations can be explained in a simple setting, one that is mathematically insightful yet devoid of extensive formalism. Accordingly, we have opted in this book to proceed by low-dimensional dynamical systems. ...

Das Buch umfasst 18 Kapitel, die gut als unabhängige Einheiten lesbar sind. Jedes beginnt mit einer knappen Einleitung und endet mit detaillierten Hinweisen auf Quellen und weitergehende Arbeiten, die in dem umfangreichen Literaturverzeichnis zusammengefasst sind. Grundlegendere Resultate werden meist ohne Beweise mitgeteilt, während die Beweise spezieller Resultate häufig durchgeführt werden; in diesem Punkt nimmt das Buch eine Mittelstellung zwischen den zuvor besprochenen Büchern ein. Jedes Kapitel enthält reichlich viele Übungsaufgaben. Einige unter ihnen regen zum Experimentieren mit PHASER an, einem Programmpaket, welches der zweite Autor in [5] vorstellt.

Literatur

[1] D.K. Arrowsmith – C.M. Place. Ordinary differential equations: A qualitative approach with applications. Chapman & Hall 1982.

[2] D.K. Arrowsmith – C.M. Place: An introduction to dynamical systems; Cambridge University Press 1990.

[3] V. Arnol'd: Equations différentielles ordinaires; Editions Mir 1974.

[4] I. Bendixson: Sur les courbes définies par des équations différentielles; Acta Math 24 (1901), 1–88.

[5] H. Koçak: Differential and difference equations through computer experiments (second edition) with diskettes containing PHASER: An Animator/Simulator for Dynamical Systems for I.B.M. Personal Computers; Springer 1989.

[6] M.W. Morris: The dynamical systems approach to differential equations; Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984), 1–64.

[7] M.W. Morris – S. Smale: Differential equations, dynamical systems, and linear algebra: Academic Press 1974.

[8] H. Poincaré: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle; J. Mathématiques 3e série 7 (1881), 375–422 et 8 (1882), 251–296. Les courbes définies par les équations différentielles; J. Mathématiques 4e série 1 (1885), 167–244.

[9] H. Poincaré: Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste, tome III; Gauthier-Villars 1899.

R. Strebel, Fribourg

Victor Klee and Stan Wagon: Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. 352 Seiten, US $ 22.–. The Mathematical Association of America 1991; ISBN 0-88385-315-9.

Das Buch ist als Band 11 in der Reihe "Dolciani Mathematical Expositions" erschienen. In dieser Reihe erscheinen nur hervorragende, preisgekrönte Bücher.

Das Buch ist eingeteilt in drei Kapitel. Das erste rankt sich um zwölf geometrische Probleme wie z.B. equichordale Punkte, Parkettierungen, Fixpunkte usw. Das zweite behandelt acht Probleme aus der Zahlentheorie, wie z.B. ägyptische Brüche, das ominöse $(3x+1)$-Problem, perfekte Zahlen usw. Das dritte schliesslich beschäftigt sich mit besonderen reellen Zahlen: mit Beziehungen zwischen π und e, mit algebraischen Zahlen, mit Summen von reziproken Potenzen und mit Ziffermustern in der Dezimaldarstellung der Zahl π .

Das Buch ist in zwei Sektionen aufgeteilt. In der ersten Sektion wird das jeweilige Problem gestellt, und es werden elementare Fragestellungen dazu besprochen. Jedes Problem ist von Verallgemeinerungen und von Aufgaben begleitet, die in einer Lösungssektion behandelt werden. In der zweiten Sektion des Buches werden dieselben Fragestellungen wieder aufgenommen, präzisiert und weitergeführt bis zur Front der mathematischen Forschung. Dort werden dann auch die bisher ungelösten Probleme ausführlicher behandelt.

Das Buch ist ein echter Leckerbissen und stellt für jeden (Schüler, Lehrer, Studenten oder Amateur) eine Herausforderung dar. Die meisten Probleme sind elementar in dem Sinne, dass die Fragestellung einfach verständlich ist. Wie man aber aus der Zahlentheorie und aus der Kombinatorik schon lange weiss, sagt dies nichts über den Schwierigkeitsgrad des Problems aus. Das Buch sollte in jeder Schul- und Universitätsbibliothek zu finden sein.

S. D'Oratio, Bern

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*