Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **48 (1993)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math. *48* (1993)

0013-6018/93/040173-05$1.50 + 0.20/0
© 1993 Birkhäuser Verlag, Basel

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1994 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma, oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1078: Lexikographische Anordnung der Catalan-Wörter

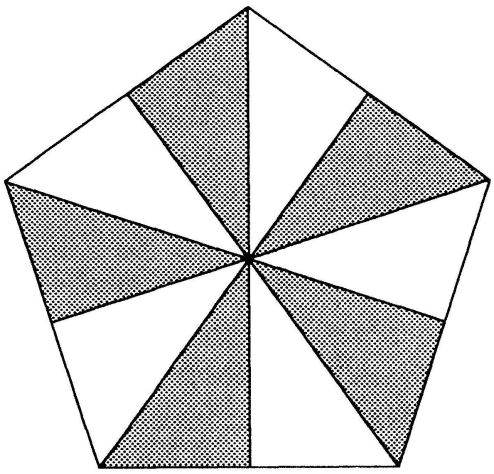
Als Catalan-Wörter vom Index n über dem Alphabet $0, 1$ bezeichnet man $2n$-stellige Wörter aus je n Zeichen 0 und 1, in denen bei jeder beliebigen Unterteilung im vorderen Abschnitt die Anzahl der Zeichen 1 die Anzahl der Zeichen 0 nicht übertrifft.

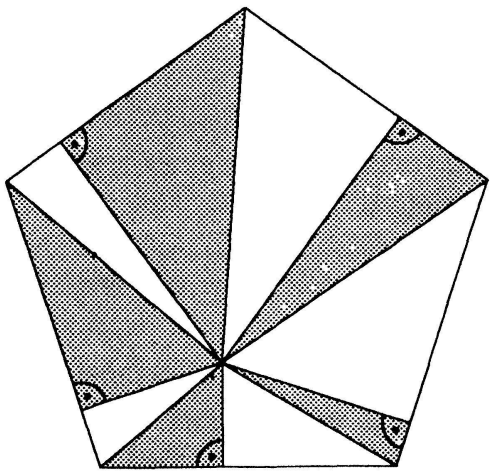
Man denke sich die Catalan-Wörter vom Index n lexikographisch angeordnet. Wie heisst dann das Nachfolge-Wort $\overline{f}$ zum Wort $f = f_1 f_2 \cdots f_{2n}$?

Max Jeger †, Luzern, CH

Aufgabe 1079: Das exzentrische Windrädchen

Das "Windrädchen" im regelmässigen n-Eck halbiert dessen Fläche (linke Figur für $n = 5$). Wie verhält es sich beim exzentrischen Windrädchen, bei dem von einem inneren Punkt im regelmässigen n-Eck einerseits die Lote zu den Seiten und andererseits die Verbindungstrecken zu den Ecken gezogen werden (rechte Figur)?





Hans Walser, Frauenfeld, CH

Aufgabe 1080 (Die einfache dritte Aufgabe):
Wendeltreppe im quadratischen Treppenhaus

Nicht selten begegnet man Treppen, deren Stufenkanten sich regelmässig längs einer Schraubenfläche hochwinden. Befindet sich eine solche Wendeltreppe in einem Treppenhaus mit quadratischem Grundriss und sind die Stufen bis an die Mauer des Treppenhauses hinaus verlängert, so erhält die äussere Treppenwange und der zu ihr parallele Handlauf eine elegant geschwungene Form. Von welcher Gestalt ist sie?

Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen

Aufgabe 1067. Die Potenzmenge $P(M_n)$ der Menge $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist durch die Teilmengenrelation $\subseteq$ teilgeordnet. Eine k-Teilmenge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ von $P(M_n)$ ist linear geordnet, wenn $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$ gilt. Man bestimme deren Anzahl $a(n, k)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Lösungen eingegangen: Jürgen Beckmann (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), Andreas Müller (Leimen, D), Werner Raffke (Vechta, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH; 3 Lösungen). Dabei sind im wesentlichen folgende zwei Lösungswege beschritten worden:

Im ersten Lösungsweg wird eine injektive Zuordnung der Menge der linear geordneten k-Teilmengen von $P(M_n)$ in eine andere Menge konstruiert, wo sich die gesuchte Anzahl mit Inklusion-Exklusion bestimmen lässt. Dies führt zur alternierenden Summe

$$a(n, k) = (k+1)^n - \binom{k-1}{1} k^n + \binom{k-1}{2}(k-1)^n - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1} 2^n.$$

Im zweiten Lösungsweg wird obiger Ausdruck für $a(n, k)$ als Vermutung aufgestellt und hernach induktiv bewiesen. Der Induktionsbeweis basiert auf einer Rekursionsformel, die wie folgt gefunden werden kann (nach Müller): Die Rekursionsformel soll die Werte $a(n, .)$ aus jenen von $a(n-1, .)$ bestimmen. Es ist also zu überlegen, wie man linear geordnete k-Teilmengen von $P(M_n)$ aus solchen von $P(M_{n-1})$ bestimmen kann. Dies kann geschehen, indem man aus einer $(k-1)$-Teilmenge $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von $P(M_{n-1})$ die k-Teilmengen

$$\{A_1, \ldots, A_s, A_s \cup \{n\}, \ldots, A_{k-1} \cup \{n\}\}, \quad 1 \le s < k$$

bildet, oder indem man aus einer k-Teilmenge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ von $P(M_{n-1})$ die k-Teilmengen

$$\{A_1, \ldots, A_{s-1}, A_s \cup \{n\}, \ldots, A_k \cup \{n\}\}, \quad 1 \le s \le k+1$$

bildet. Die beiden Methoden ergeben disjunkte Mengen von k-Teilmengen, denn im ersten Verfahren erhält man genau diejenigen k-Teilmengen, in denen es zwei aufeinanderfolgende Mengen gibt, die sich genau um das Element n unterscheiden, das zweite Verfahren liefert alle übrigen k-Teilmengen, insbesondere (für $s = k+1$) auch jene, deren Vereinigung n nicht enthält. Man hat also die Rekursionsformel

$$a(n, k) = (k+1) \cdot a(n-1, k) + (k-1) \cdot a(n-1, k-1).$$

Aus $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ergeben sich die Anfangswerte $a(0,1) = 1$ und $a(0,r) = 0$ für $r \geq 2$. Eine Vereinfachung der Darstellung ergibt sich unter Verwendung der Stirlingschen Zahlen zweiter Art (Wyss). Der Aufgabensteller bemerkt noch, dass sich für $k \geq n+1$ als Zusatzergebnis die Formeln

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n+2-i)^n$$

und

$$0 = \sum_{i=0}^{n+r} (-1)^i \binom{n+r}{i} (n+r+2-i)^n, \quad r > 0$$

ergeben.

Aufgabe 1068. (Kurzfassung) Ein Schreiner sägt auf einer horizontalen Werkbank mehrere identische Zierleistenstücke zurecht. Das Sägeblatt, mit dem er jede Schnittfläche herstellt, befindet sich anfangs in vertikaler Lage normal zur Laufrichtung der Leiste. Es wird sodann um eine vertikale Achse mit 45° verdreht. Anschliessend wird es um eine horizontale Achse nochmals mit 45° aus seiner Vertikallage heraus geschwenkt. Die beiden abschliessenden Schnittflächen jedes Stücks liegen symmetrisch bezüglich dessen Mittelnormalebene. Durch bündiges Zusammenleimen solcher Stücke erhält der Schreiner zu seiner Verwunderung einen geschlossenen Rahmen. Aus wie vielen Stücken besteht der Rahmen? Welche Verallgemeinerungen drängen sich auf?

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind vier Lösungen eingetroffen: Jürgen Beckmann (Düsseldorf, D) beantwortet die Fragen mit ausgeprägtem Bezug zum Schreinerhandwerk, Andreas Müller (Leimen, D) wählt die Spitze einer regelmässigen n-seitigen geraden Pyramide als Träger des n-seitigen Zierleistenrahmens, J. Schaer (Calgary, CDN) leitet unter Verwendung einer Winkelbeziehung des rechtwinkligen Dreikants eine explizite Formel für die Kombination der beiden Drehwinkel der Säge her und Roland Wyss (Flumenthal, CH) setzt die Matrizenrechnung ein, um die beiden Drehungen zusammenzusetzen und so auf die gleiche Winkelbeziehung zu stossen, die für einen regelmässigen n-seitigen Rahmen gelten muss.

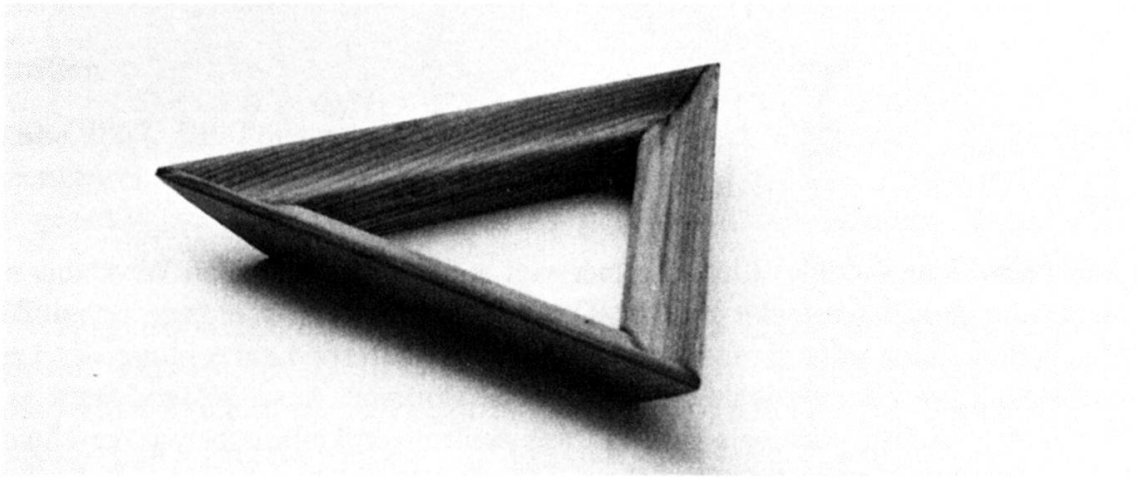
Lösung von Jürgen Beckmann. Für eine solide Verbindung der Zierleisten könnte der Schreiner auf die Idee kommen, am einen Ende der Leisten einen Zapfen und am anderen Ende ein dazu passendes Bohrloch anzubringen, beide jeweils senkrecht zur Schnittfläche. Solchermassen ergänzte Bauteile unterstützen nun glücklicherweise auch sehr stark die Anschauung des mathematischen Problems: Erstens wird klar, dass ein vollständiger Rahmen in der durch Zierleiste und Zapfen/Bohrloch definierten Ebene entstehen muss, und zweitens sieht man ein, dass der Winkel zwischen zwei zusammengefügten Zierleisten gleich dem Doppelten des Winkels zwischen einer Leiste und ihrem Zapfen ist, denn:

$$\angle(\text{Leiste}_1, \text{Leiste}_2) = \angle(\text{Leiste}_1, \text{Zapfen}_1) + \angle(\text{Loch}_2, \text{Leiste}_2) = 2 \cdot \angle(\text{Leiste}, \text{Zapfen}).$$

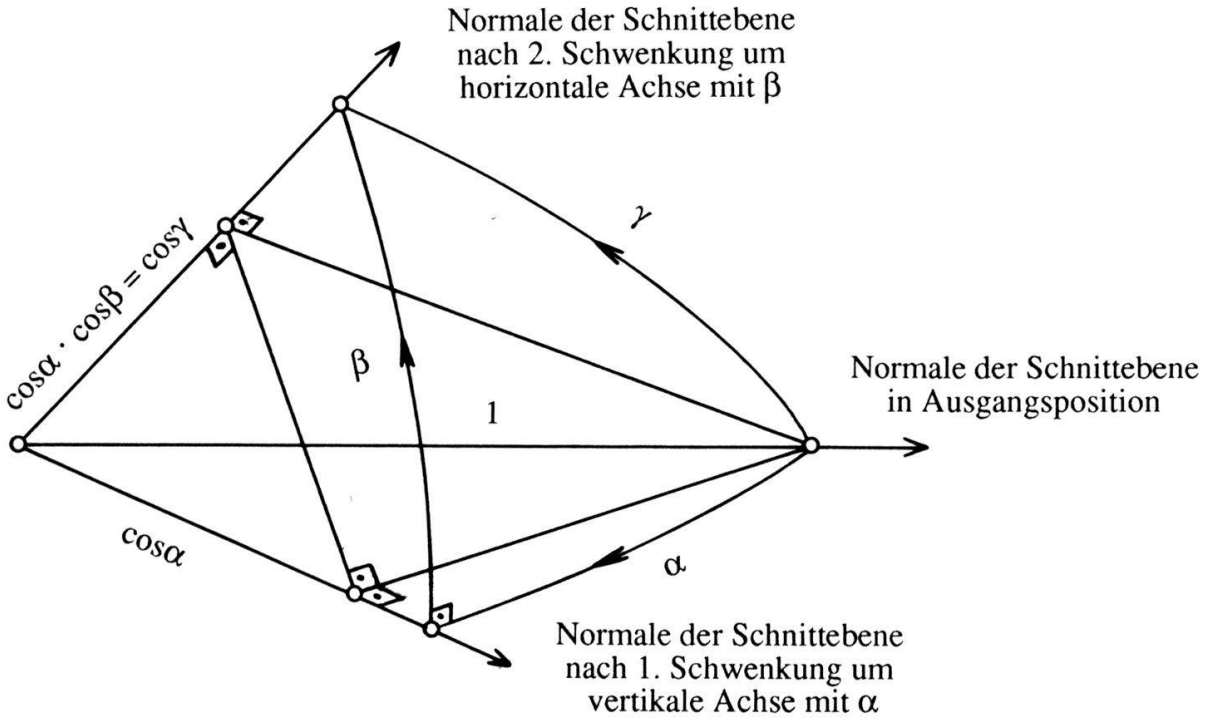
Einen geschlossenen Rahmen mit n Seiten erhält man also dann und nur dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} \angle(\text{Leiste}_i, \text{Leiste}_{i+1}) = 2n \cdot \angle(\text{Leiste}, \text{Zapfen}) = 360°. \tag{1}$$

Für den in der Aufgabenstellung beschriebenen Schnitt berechnet man $\angle$(Leiste, Zapfen) $= 60°$. Der Schreiner wird also einen dreieckigen Rahmen erhalten.



Kommentar. Die in der Aufgabenstellung geschilderte Geschichte entstammt nicht — wie ein Löser vermutet — einem Lehrbuch, sondern hat sich — wie die obenstehende Fotografie glaubhaft machen soll — tatsächlich zugetragen. Mit der beigefügten Figur



soll ferner die bei allen Lösern nur angetönte Berechnung des Winkels $\gamma = \angle$(Leiste, Zapfen) nachvollziehbar gemacht werden. Sie stellt drei Grosskreisstücke α, β und γ auf der Einheitskugel dar, wobei α und β senkrecht zueinander stehen. Die Normale der

Sägeschnittebene wird von der Ausgangslage (der Laufrichtung der Leiste) zuerst mit α in die erste, dann mit β in die zweite Position gedreht, welche mit der Ausgangslage den Winkel γ einschliesst. Durch eine Normalebene zur zweiten Position entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Ecke den Abstand

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma \tag{2}$$

vom Kugelmittelpunkt aufweist. Damit nun ein geschlossener n-seitiger Zierleistenrahmen entsteht, wird gemäss (1) die Forderung $\gamma = 180°/n$ gestellt. Zu jedem vorgegebenen n gibt es dann unendlich viele Paare (α, β), die (2) genügen. Das bedeutet, dass die Leisten bei vorgegebenem n noch um ihre Längsachsen gedreht werden können. Die Beziehung (2) wird auch "sphärischer Satz des Pythagoras" genannt. Für kleine Winkel α, β und γ gilt in der Tat näherungsweise $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, was bei einer Reihenentwicklung von $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ unter Vernachlässigung höherer Glieder sofort aus (2) folgt. Überraschenderweise gilt die Näherung $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ sogar für konkrete Fälle recht gut: Für $n = 7$ beispielsweise ist $\gamma \approx 25.71°$. Wählt man $\alpha = 20°$, liefert (2) $\beta \approx 16.5058°$. Damit wird $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \approx 25.93°$.