Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 49 (1994)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *49* (1994) 0013-6018/94/020080-04$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1994 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1084: Es seien a, b, λ reelle Zahlen, so dass $\lambda > 0$ und $b - a \geq \pi/\sqrt{\lambda}$. Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Man zeige: Es gibt ein $t \in (a, b)$ mit $f'(t) < \lambda + f^2(t)$.

Walther Janous, Innsbruck, A

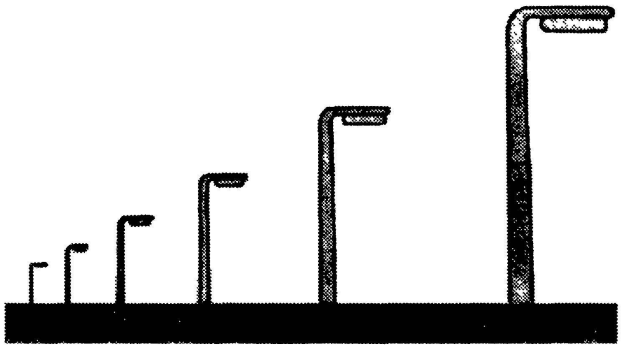
Aufgabe 1085: Ein abgesprochenes Abstimmungsspiel. Zwölf Personen sitzen auf zwölf numerierten Stühlen im Kreis. Aus einer Kollektion von zwölf roten und zwölf blauen Hüten wird nun jeder Person ein Hut aufgesetzt, und zwar so, dass jede Person die Farbe aller Hüte mit Ausnahme des eigenen erkennt. Darauf findet unter den zwölf Personen eine geheime Abstimmung statt, bei der zwischen "rot" und "blau" zu wählen ist. Das Ergebnis soll ausgeglichen sein: Werden die Stimmen aller Personen berücksichtigt, so sollen sechs auf "rot" und sechs auf "blau" fallen; werden nur die Stimmen der Personen mit roten Hüten berücksichtigt, so darf auf die eine Farbe höchstens eine Stimme mehr fallen als auf die andere.

Wie können sich die zwölf vor dem Aufsetzen der Hüte verabreden, damit ein solches Ergebnis bei jeder Verteilung der Farben zustande kommt?

Ernst Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1086 (Die einfache dritte Aufgabe): In einem weit verbreiteten Lehrbuch über Geometrie lesen wir als Legende zur untenstehenden Figur folgenden Text: "Die Figur zeigt Masten einer Strassenbeleuchtung. Sie sind in Wirklichkeit gleich hoch und in gleichen Abständen gesetzt. Auf dem Bild hat jeder Mast nur $2/3$ der Höhe des vorangehenden."

Wie kam diese Abbildung zustande?



Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen

Aufgabe 1072. Die unendliche reelle Zahlenfolge $\{a_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist folgendermassen definiert:

$$a_1 \neq 0 \qquad \text{und} \qquad a_{k+1} = a_k + \frac{a_k}{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right)(k+1)}.$$

Man bestimme ihren Grenzwert $\lim_{k \to \infty} a_k$.

László Zsilinsky, Nitra, Slowakei

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind zehn Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Hans Egli (Zürich, CH), Kurt Eichhorn/István Nemes (Linz, A), Joachim Klose (Bonn, D), Hansjürg Lädrach (Aarwangen, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Werner Raffke (Vechta, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH). In fast allen Lösungen wird zunächst mit einem einfachen Induktionsbeweis gezeigt, dass die Folge $\{a_k\}$ im wesentlichen die Teilsummenfolge der harmonischen Reihe ist:

$$a_k = a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

Daraus folgt die Divergenz der Folge.

P. Bundschuh und K.-W. Lau geben eine Abschätzung mit einer Produktdarstellung.

Aufgabe 1073. Unter einem perfekten Quader versteht man einen Quader mit ganzzahligen Seiten, ganzzahligen Flächendiagonalen und ganzzahliger Raumdiagonale. Man zeige: Es existiert kein perfekter Quader mit einer Kante $k = 30$.

Horst Bergmann, Hamburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind fünf Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Heiner Kaiser (Jena, D), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Andreas Müller (Leimen, D), Werner Raffke (Vechta, D). Die Lösungen verwenden in unterschiedlichem Masse Informatikmittel. Im folgenden die Lösung nach P. Bundschuh:

Nach der gegebenen Definition heisst ein Quader mit Seitenlängen $i, j, k \in \mathbb{R}_+$ genau dann perfekt, wenn i, j, k natürliche Zahlen und alle vier Summen $i^2 + j^2$, $j^2 + k^2$, $k^2 + i^2$, $i^2 + j^2 + k^2$ Quadratzahlen sind.

Nehmen wir nun an, es gäbe einen perfekten Quader mit $k = 30$, so bedeutet dies die Existenz natürlicher x, y mit $x^2 + 900 = y^2$, wobei zusätzlich x^2 Summe zweier positiver Quadrate $(i^2 + j^2)$ ist. Aus $(y+x)(y-x) = 900$ ergeben sich, da beide Faktoren links gerade sein müssen, die vier Möglichkeiten $(x, y) = (16, 34), (40, 50), (72, 78), (224, 226)$. Die Beziehung $x^2 = i^2 + j^2$ bedeutet, dass (i, j, x) ein pythagoräisches Tripel ist, zu dem ein eindeutig bestimmtes primitives pythagoräisches Tripel $(i_1, j_1, x_1) \in \mathbb{N}^3$ gehört, für das x_1 jedenfalls ungerade und wegen $x \in \{16, 40, 72, 224\}$ gleich $1, 3, 5, 7$ oder 9 ist. Hiervon ist lediglich $x_1 = 5$ möglich, was zu $\{i_1, j_1\} = \{3, 4\}$ führt, also zu $x = 40$ und $\{i, j\} = \{24, 32\}$. Wegen $k = 30$ ist dann aber weder $i^2 + k^2$ noch $j^2 + k^2$ ein Quadrat und unsere Annahme ist zu einem Widerspruch geführt.

Bemerkung. H. Kaiser gibt einen Hinweis auf ein verwandtes Problem, in welchem ganzzahlige Orthoscheme gesucht sind: Orthoscheme sind natürliche Verallgemeinerungen der rechtwinkligen Dreiecke. Sie besitzen einen total-orthogonalen Kantenzug; im Fall der Dimension 3 handelt es sich dabei um drei Kanten i, j, k mit $j \perp i$, $k \perp i$ und $k \perp j$. Jedes 3-Orthoschem bestimmt offensichtlich in eindeutiger Weise einen Quader, und umgekehrt besitzt jeder Quader ein charakteristisches 3-Orthoschem. Die drei total-orthogonalen Kanten ganzzahliger Länge i, j, k eines *perfekten* 3-Orthoschems erfüllen die Bedingungen: $\sqrt{i^2 + j^2} \in \mathbb{N}$, $\sqrt{j^2 + k^2} \in \mathbb{N}$, $\sqrt{i^2 + j^2 + k^2} \in \mathbb{N}$; für perfekte Quader gilt zusätzlich $\sqrt{i^2 + k^2} \in \mathbb{N}$.

Mit Computerhilfe fand H. Kaiser, dass es bis zu einer maximalen Kantenlänge von 4000 und bis auf Ähnlichkeit genau 11 perfekte 3-Orthoscheme gibt. So bestimmen zum Beispiel die Kantenlängen $i = 448$, $j = 840$, $k = 495$ ein perfektes 3-Orthoschem. Es zeigt sich aber, dass keines der gefundenen 11 perfekten 3-Orthoscheme Anlass zu einem perfekten Quader gibt, das heisst, in keinem Falle ist die vierte Bedingung erfüllt. Will man alle perfekten Orthoscheme (auch in höheren Dimensionen) bestimmen, so gelangt man zwangsläufig zu Fragen nach der Existenz von *rationalen Punkten auf elliptischen Kurven*, also zu einem Gebiet, das sich im Wesentlichen auf Grund der berühmten Vermutung von Fermat entwickelt hat.

Aufgabe 1074 (Die einfache dritte Aufgabe). Aus den zwei ersten Potenzgesetzen leitet man in der Schule zwei entsprechende Logarithmengesetze her. Muss das dritte Potenzgesetz ohne Partner sein?

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} & \log_a(u \cdot v) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} & \log_a(u^m) &= m \cdot \log_a(u) \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n & &??? \end{aligned}$$

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Fünf Leser haben sich an der Suche nach einem dritten Logarithmengesetz beteiligt und ihre Vorschläge eingesandt. Andreas Müller

(Leimen, D) und Michael Vowe (Therwil, CH) schlagen folgendes vor:

$$n = \log_a(u) = \log_b(v) \qquad \Rightarrow \qquad n = \log_{ab}(uv) \quad .$$

Hans Egli (Zürich, CH) und H.-J. Seiffert (Berlin, D) haben sich stärker an die Gestalt der beiden ersten Logarithmengesetze angelehnt und schreiben:

$$\frac{1}{\log_{ab}(u)} = \frac{1}{\log_a(u)} + \frac{1}{\log_b(u)} \quad .$$

Beim Beweis bemerkt H.-J. Seiffert, dass dieses Gesetz direkt aus dem ersten Logarithmengesetz

$$\log_u(ab) = \log_u(a) + \log_u(b)$$

durch Anwenden von

$$\log_u(a) = \frac{1}{\log_a(u)}$$

folgt. Schliesslich hat Dieter Koller (Zürich, CH) das folgende Gesetz gefunden:

$$\log_{ab}(u) = \frac{\log_a(u)}{1 + \log_a(b)} = \frac{\log_b(u)}{1 + \log_b(a)} \quad ,$$

das sich aus dem vorangehenden durch Anwenden von

$$\frac{\log_a(b)}{\log_a(u)} = \log_u(b) = \frac{1}{\log_b(u)}$$

ableiten lässt.

Bemerkung. Sobald man Logarithmen zur Verfügung hat, zeigt es sich, dass das dritte Potenzgesetz aus dem ersten und zweiten folgt:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= a^n \cdot (a^{\log_a(b)})^n = a^n \cdot a^{n \cdot \log_a(b)} = a^{n + n \cdot \log_a(b)} \\ &= a^{(1+\log_a(b)) \cdot n} = (a^{1+\log_a(b)})^n = (a^1 \cdot a^{\log_a(b)})^n = (a \cdot b)^n . \end{aligned}$$

So ist es nicht verwunderlich, dass im Prinzip kein Partner zum dritten Potenzgesetz benötigt wird.