Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 49 (1994)

Artikel: Approximationssätze der Analysis
Autor: Lang, Serge
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45425

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *49* (1994)

0013-6018/94/010092-12$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Approximationssätze der Analysis

Serge Lang

Serge Lang wurde 1927 in Paris geboren, wo er auch seine ersten Schuljahre absolvierte. Die weitere Ausbildung erhielt er dann allerdings in den Vereinigten Staaten, wo er das California Institute of Technology (Caltech) und die University of Princeton besuchte. Hier erhielt er das Doktorat in Mathematik im Jahre 1951. Nach Aufenthalten am Institute for Advanced Study in Princeton und an der University of Chicago war er von 1955 bis 1970 Professor an der Columbia University in New York. Gastprofessuren in Princeton und Harvard folgten, und 1972 wurde er Professor an der Yale University. Seine Interessen sind weitgespannt, aber sein Hauptinteresse gehörte immer der Mathematik, besonders der Zahlentheorie. Bis anhin hat er 34 Bücher und über 70 Forschungsartikel veröffentlicht.

Ich werde in meinem Vortrag einen sehr allgemeinen Approximationssatz formulieren, der auf sogenannten Diracfolgen basiert. Dann werde ich verschiedene Beispiele und Anwendungen diskutieren, insbesondere den sogenannten Weierstrassschen Approxima-

Die Entwicklung der Mathematik weiss von vielen Beispielen, wo eine neue Art der Fragestellung einem ganzen Gebiet ein völlig neues Aussehen gegeben hat; man denke beispielsweise an die Einführung der axiomatischen Methode und deren tiefgreifende Konsequenzen für die Darstellung vieler Gebiete der Mathematik. Nicht selten ergeben sich aus solchen Umwälzungen neben ganz neuen Resultaten auch neue, einfachere Beweise alter grundlegender Sätze. Ein konkretes Beispiel erleben wir im vorliegenden Beitrag von Serge Lang. Lang beginnt seine Ausführungen, indem er einen Ring von Funktionen betrachtet und die einfache, ja fast naive Frage stellt, ob darin ein Einselement existiere. Die Antwort darauf zieht eine lange Reihe von Folgerungen nach sich: Sie reichen vom Weierstrassschen Approximationssatz über Sätze aus der Theorie der Fourierreihen bis hin zu Lösungen von partiellen Differentialgleichungen. Dabei liefert der neue Standpunkt — wie könnte es anders sein — jeweils neue mathematische Einsichten in das behandelte Einzelproblem. – Der Beitrag beruht auf einem Vortrag, den Serge Lang am 26. Mai 1993 vor einem Publikum von Mathematikstudenten an der ETH in Zürich gehalten hat. Der Vortrag wurde auf Band aufgenommen, der Text nachträglich ins Deutsche übersetzt und von Serge Lang überarbeitet. Die offene direkte Sprache haben wir mit Absicht nicht verändert: Wir hoffen damit einen Hauch von Langs Lebendigkeit und Direktheit während seines Vortrages für den Leser spürbar machen zu können. *ust*

tionssatz, der besagt, dass eine stetige reelle Funktion auf einem beschränkten Intervall gleichmässig durch Polynome approximiert werden kann. Später werde ich auf Fourierreihen zu sprechen kommen, auf harmonische Funktionen und Poissonfamilien, und schliesslich auf Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. In allen diesen Fällen erhalten wir als Anwendung unseres allgemeinen Satzes fundamentale Aussagen.[1])

Wir definieren zuerst den Begriff der Faltung von zwei Funktionen. Es seien f, g zwei auf $\mathbf{R}$ definierte stetige (oder allgemeiner stückweise stetige) komplexwertige Funktionen, die für $x \to \pm\infty$ gegen null streben, und zwar genügend rasch, damit alle auftretenden Integrale konvergieren. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Funktionen ausserhalb eines endlichen Intervalles verschwinden, also kompakten Träger aufweisen.

Die *Faltung* $f * g$ ist definiert durch

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\ .$$

Man sieht unmittelbar, dass die Faltungsoperation kommutativ ist,

$$f * g = g * f\,;$$

dazu muss man im Integral nur die Substitution $u = x - t$ und $t = x - u$ durchführen. Natürlich ist die Faltung linear gegenüber der Addition, das heisst, es gilt

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

und

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g)$$

für jede komplexe Zahl α. Die (stückweise) stetigen komplexen Funktionen bilden also unter dem Faltungsprodukt eine kommutative Algebra über $\mathbf{C}$, die reellen Funktionen bilden eine kommutative Algebra über $\mathbf{R}$.

Man kann sich fragen, ob für das Faltungsprodukt $*$ ein Einselement existiert: *Gibt es eine Funktion, sagen wir δ, mit $\delta * f = f$ für alle Funktionen f?* Wer sagt ja? (Einige Hände erheben sich.) Wer sagt nein? (Auch hier gehen nur wenige Hände in die Höhe. Die Mehrzahl hat sich offensichtlich der Stimme enthalten.) Die Antwort ist Nein. Aber wir werden hier nun etwas definieren, das sich *fast* wie ein Einselement verhält, nämlich sogenannte *Diracfolgen*. Dies sind Folgen $\{\phi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, von stetigen Funktionen mit den folgenden drei Eigenschaften:

DIR 1. Die Funktionen ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots$ sind positiv, d.h. $\phi_k(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

DIR 2. Das Integral über ϕ_k, $k = 1, 2, \ldots$ ist normiert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(x)\,dx = 1$.

DIR 3. Zu $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ existiert k_0, so dass für $k \geq k_0$ die Abschätzung

$$\int_{|x| \geq \delta} \phi_k(x)\,dx \leq \epsilon$$

gilt.

Für derartige Diracfolgen beweisen wir nun einen allgemeinen Satz, der überraschend tiefliegende Anwendungen in verschiedenen Gebieten hat.

1) Weitere, hier nicht behandelte Beispiele zu diesem Themenkreis sind in dem Buch S. Lang: *Real and Functional Analysis*, Springer Verlag 1993, zu finden.

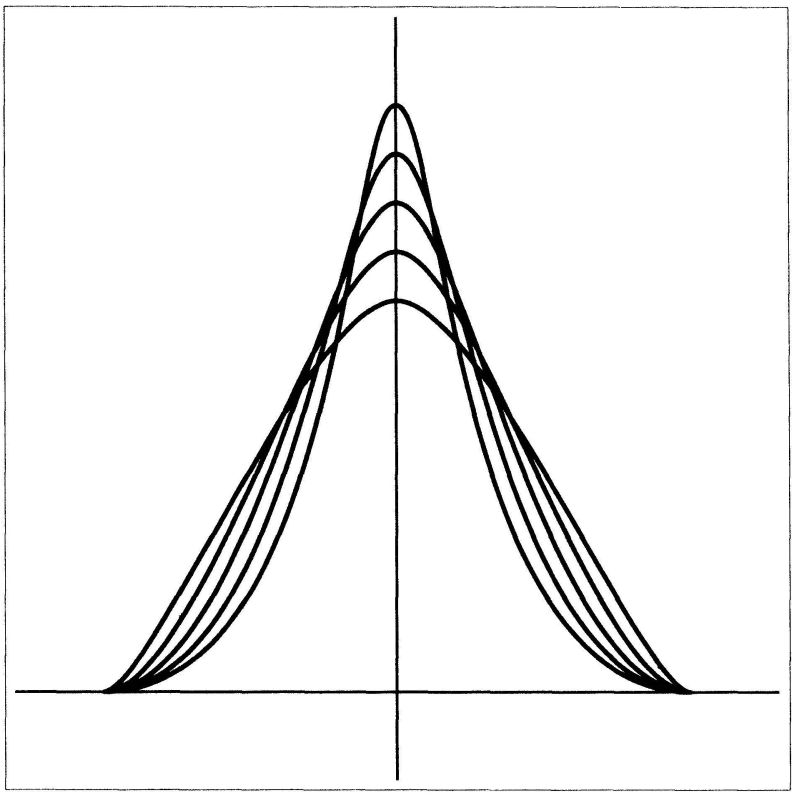

Fig. 1 Die ersten Glieder der Landaufolge als Beispiel einer Diracfolge, siehe Abschnitt 1.

Satz. (Allgemeiner Approximationssatz.) *Die Funktion f sei beschränkt und stückweise stetig auf* $\mathbf{R}$. *Dann konvergiert $\phi_k * f$ für $k \to \infty$ gegen f, und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Menge M, auf der f stetig ist.*

In einem gewissen Sinn strebt also die Folge $\{\phi_k\}$ gegen das Einselement, obschon eine Limes*funktion* ganz offensichtlich nicht existiert. Auf Grund dieser Eigenschaft wird eine Diracfolge auch etwa eine *Approximation der Einheit* genannt.

Beweis. Der Beweis ist sehr einfach. Die Faltung ist definiert durch

$$\phi_k * f(x) = f * \phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) f(x-t)\, dt \ .$$

Indem ich mit der Eigenschaft **DIR 2** der Diracfolge schreibe

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_k(t)\, dt \ ,$$

erhalte ich

$$\phi_k * f(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t)(f(x-t) - f(x))\, dt \ .$$

Es sei nun $B = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$. Als stetige Funktion auf der kompakten Menge M ist f gleichmässig stetig. Deshalb existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $x \in M$ und $|t| < \delta$ gilt

$$|f(x-t) - f(x)| < \epsilon \ .$$

Damit kann ich das Faltungsintegral wie folgt abschätzen:

$$|\phi_k * f(x) - f(x)| \leq \int_{|t|\leq\delta} \phi_k(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt + \int_{|t|>\delta} \phi_k(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt\ .$$

Für $k > k_0$ ergibt sich daraus mit Obigem

$$|\phi_k * f(x) - f(x)| \leq \epsilon + \epsilon \cdot 2B = \epsilon \cdot (1 + 2B)\ .$$

Damit ist die gleichmässige Konvergenz auf M nachgewiesen.

Im folgenden machen wir nun von diesem einfachen allgemeinen Satz eine Reihe von verschiedenartigen Anwendungen.

1 Weierstrassscher Approximationssatz

Wir wenden uns zuerst dem folgenden klassischen Satz zu:

Satz. *Es sei f auf $[a,b]$ stetig. Dann kann f gleichmässig durch Polynome approximiert werden.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Intervall [0,1] ist. Ist ferner l die lineare Funktion, welche in 0 den Wert $f(0)$ und in 1 den Wert $f(1)$ annimmt, so genügt es offensichtlich, den Satz für $f - l$ zu beweisen. Aber $f - l$ nimmt an den Enden des Intervalles den Wert 0 an. Wir können deshalb, wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit, von Anfang an $f(0) = 0 = f(1)$ annehmen. Wir definieren nun die sogenannte *Landaufolge*

$$\phi_k(x) = \begin{cases} c_k(1-x^2)^k & \text{für } -1 \leq x \leq 1\ , \\ 0 & \text{für } |x| > 1\ . \end{cases}$$

Dabei sei c_k so gewählt, dass $\int \phi_k(x)\,dx = 1$ gilt. Die obige Folge erfüllt offensichtlich die Forderungen **DIR 1** und **DIR 2**; ohne Schwierigkeit weist man ferner nach, dass die Forderung **DIR 3** erfüllt ist. Damit ist $\{\phi_k\}$ eine Diracfolge.[2]) Aus dem Approximationssatz folgt nun, dass $\phi_k * f$ gegen f konvergiert und zwar gleichmässig in [0,1]. Es bleibt einzig zu beweisen, dass $\phi_k * f$ ein Polynom ist. Es gilt

$$\phi_k * f(x) = \int_{-1}^{1} \phi_k(x-t) f(t)\,dt\ .$$

Nun ist $\phi_k(x-t)$ ein Polynom in x und t, also

$$\phi_k(x-t) = \sum a_{kij} x^i t^j,\ a_{kij} \in \mathbf{R}\ .$$

2) Für die Details der Rechnungen vergleiche man S. Lang: *Undergraduate Analysis*, Springer Verlag, p. 245 ff.

Damit folgt

$$\phi_k * f(x) = \sum a_{kij} x^i \int_{-1}^{1} t^j f(t)\, dt = \sum_i \left(\sum_j a_{kij} b_j \right) x^i ,$$

wobei wir $b_j = \int_{-1}^{1} t^j f(t)\, dt$ gesetzt haben. Also ist $\phi_k * f(x)$ ein Polynom in x. Damit ist der Satz bewiesen.

Wer hat schon einen Beweis des Satzes von Weierstrass gesehen?

Ein Student: Uns wurde in einer Vorlesung ein anderer Beweis vorgeführt.

Lang: Was für ein Beweis?

Student: Mit dem Satz von Weierstrass-Stone.

Lang: Ja, der Satz von Weierstrass-Stone ist zweifellos ein gutes und sehr nützliches Resultat. Aber ein wesentlicher Unterschied zu unserem Beweis besteht darin, dass er keinen Hinweis gibt, wie die Approximationspolynome zu konstruieren sind. Nicht einmal über die Grade der Polynome lässt sich daraus etwas ablesen, etwa über die naheliegende Frage, wie rasch diese Grade als Funktion von n zunehmen. Wir hingegegen haben für die Approximation eine ganz explizite Folge von Polynomen erhalten. In diesem Sinn ist unser Beweis besser.

2 Fourierreihen

In dieser Anwendung betrachte ich 2π-periodische Funktionen. Es sei f eine solche Funktion. Die Integrale sind dann konsequenterweise von $-\pi$ bis $+\pi$ zu nehmen, statt von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Einfachheit halber versehen wir die Integrale ausserdem mit einem Normierungsfaktor $1/2\pi$. Es sei $\chi_k(x) = e^{ikx}$. Dann betrachten wir die Faltung von χ_k mit f. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
(\chi_k * f)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \chi_k(x-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} f(t) \frac{dt}{2\pi} \\
&= e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) \frac{dt}{2\pi} \\
&= c_k e^{ikx} ,
\end{aligned}$$

wo

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) \frac{dt}{2\pi}$$

nichts anderes als der k-te *Fourierkoeffizient* von f ist. Die *Fourierreihe* von f lautet

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} .$$

Wir definieren nun den *Dirichletkern* D_n durch

$$D_n = \sum_{k=-n}^{n} \chi_k \ .$$

Dann ist $S_{f,n} = D_n * f$ gerade die n-te Partialsumme der Fourierreihe:

$$S_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx} \ .$$

Leider ist $\{D_n\}$ keine Diracfolge, und, wie Sie wissen, konvergiert die Fourierreihe von f im allgemeinen nicht gegen die Funktion f. Wir werden jetzt aber eine etwas andere zu f gehörige Folge trigonometrischer Funktionen konstruieren, und zeigen, dass diese gegen die Funktion f konvergiert. Zu diesem Zweck definieren wir mit Hilfe von $\{D_n\}$ zuerst eine Diracfolge, nämlich den sogenannten *Fejérkern*. Dieser ist als Mittelwert definiert:

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{n-1}(x)\right) \ .$$

Es ist eine einfache Übungsaufgabe, die folgende trigonometrische Identität zu beweisen:

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} \ .$$

Wegen $K_n(x) \geq 0$ ist die Bedingung **DIR 1** erfüllt. Um $D_n(x)$ zu integrieren, integrieren wir die Summe gliedweise. Aus den Werten

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_k \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\frac{dx}{2\pi} = \begin{cases} 1\,, & k = 0 \\ 0\,, & k \neq 0 \end{cases}$$

folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\frac{dx}{2\pi} = 1 \ .$$

Es ergibt sich, dass $\{D_n\}$ die Bedingung **DIR 2** erfüllt; aber dann folgt sofort, dass auch $\{K_n\}$ diese Bedingung erfüllt, das heisst

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\frac{dx}{2\pi} = 1 \ .$$

Schliesslich ist für $\delta \leq |x| \leq \pi$

$$\left|\frac{1}{\sin^2(x/2)}\right|$$

beschränkt, etwa durch B. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ existiert also n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$\frac{1}{n}\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \left|\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}\right| \frac{dx}{2\pi} \leq \frac{1}{n}B \ \leq \epsilon.$$

Damit erfüllt $\{K_n\}$ auch die Bedingung **DIR 3**. Aus unserem allgemeinen Satz folgt nun das folgende berühmte Resultat aus der Theorie der Fourierreihen:

Satz. (Fejér-Cesaro.) *Für alle stückweise stetigen 2π-periodischen Funktionen f konvergieren die Mittelwerte der Partialsummen der Fourierreihe von f gegen f,*

$$\frac{1}{n}\left(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\right) \to f(x),$$

und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Menge, auf der f stetig ist.

Die Summenbildung über die Mittelwerte der Partialsummen nennt man auch *Cesaro-Summation.*

3 Harmonische Funktionen auf der Kreisscheibe

In diesem Beispiel wird nicht eine Diracfolge sondern eine Dirac*familie* $\{\phi_r\}$ mit $0 \le r < 1$ eine Rolle spielen. Ferner betrachte ich den Grenzübergang $r \to 1$ statt $n \to \infty$. Die Axiome lauten dementsprechend:

DIR 1. Für alle r, $0 \le r < 1$ und alle t gilt $\phi_r(t) \ge 0$.

DIR 2. Für alle r, $0 \le r < 1$ gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$.

DIR 3. Zu $\epsilon, \delta > 0$ existiert r_0 mit $\int_{|t|\ge\delta} \phi_r(t)\,\frac{dt}{2\pi} \le \epsilon$ für $r_0 \le r < 1$.

Im wesentlichen gleich wie oben beweist man dann einen Approximationssatz für die Familie $\{\phi_r\}$:

Es strebt $\phi_r * f$ gegen f für $r \to 1$, und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Menge, auf der f stetig ist.

Als nächstes definieren wir die *Poissonfamilie*:

$$P_r(\theta) = P(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}\,, \quad 0 \le r < 1\,.$$

Die hier auftretende Reihe konvergiert für $r \le r_0 < 1$ gleichmässig, wie ein Vergleich mit einer geometrischen Reihe sofort zeigt. Wir werden jetzt nachweisen, dass $\{P_r\}$ eine Diracfamilie ist.

Eine einfache trigonometrische Rechnung liefert

$$P(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}\,,$$

und der Wert dieses Ausdrucks ist im betrachteten Bereich immer grösser gleich 0. Damit ist die Bedingung **DIR 1** erfüllt. Um **DIR 2** zu zeigen können wir die Reihe gliedweise integrieren. In dieser Rechnung benützen wir wie im Abschnitt 2 die Tatsache

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_k \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \begin{cases} 1\,, & k = 0 \\ 0\,, & k \ne 0\,. \end{cases}$$

Es folgt, dass nur der Reihenterm mit dem Index 0 einen nichttrivialen Anteil liefert, nämlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 1 .$$

Damit ist die Bedingung **DIR 2** erfüllt.

Schliesslich ist auch die dritte Bedingung **DIR 3** für Diracfamilien erfüllt. Für $|\theta| \geq \delta > 0$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \leq \frac{1}{1 - 2r\cos\delta + r^2} .$$

Das Minimum des Nenners im Ausdruck rechts wird offensichtlich für $r = \cos\delta$ erreicht. Folglich gilt

$$\frac{1}{1 - 2r\cos\delta + r^2} \leq \frac{1}{1 - (\cos\delta)^2} .$$

Als Funktion von r ist somit

$$\frac{1}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

beschränkt. Daraus folgt, dass

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

für r gegen 1 gleichmässig gegen 0 konvergiert. Es existiert also r_0, so dass für $r_0 \leq r < 1$ die Abschätzung

$$\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} P_r(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} \leq \epsilon$$

gilt. Damit ist für die Familie $\{P_r\}$ die Bedingung **DIR 3** nachgewiesen.

Aus unserem allgemeinen Approximationssatz für Diracfamilien ergibt sich daraus die Aussage:

Für $r \to 1$ gilt $P_r * f \to f$, und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Menge, auf der f stetig ist.

Wir kommen nun zu einem weiteren Aspekt unseres Beispiels, der mit partiellen Differentialgleichungen zu tun hat. Zu diesem Zweck betrachten wir noch einmal das allgemeine Faltungsintegral

$$\phi * f(x) = \int \phi(x - t) f(t)\, dt ,$$

wo ϕ eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist. Bezeichnet D die Ableitung nach x, so gelten unter geeigneten Konvergenzbedingungen die Formeln

$$D(\phi * f) = (D\phi) * f$$

und damit auch

$$D^m(\phi * f) = (D^m\phi) * f$$

für $m \geq 1$. Dies ergibt sich leicht daraus, dass unter geeigneten Konvergenzbedingungen unter dem Integral abgeleitet werden darf, eine Tatsache, die Sie sicher aus der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung kennen:

$$D(\phi * f)(x) = \frac{d}{dx} \int \phi(x-t) f(t)\, dt = \int \frac{d}{dx} \phi(x-t) f(t)\, dt = ((D\phi) * f)(x) \ .$$

Wir wenden diese Formeln nun in einem Fall an, wo die Konvergenzbedingungen leicht nachzuprüfen sind.

Unsere Anwendung betrifft die Funktion $P_r(\theta) = P(r, \theta)$. Es bezeichne Δ den *Laplace-Operator*

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

in kartesischen Koordinaten (x, y). Wir werden diesen Operator in Polarkoordinaten (r, θ) benötigen. Wer weiss die Formel für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten? (Keine Antwort.) Ich pflege diese Frage immer zu stellen, und meistens gibt mir niemand Antwort. Sie sind also genau gleich wie alle andern. Ich weiss die Formel ja auch nur deshalb auswendig, weil ich Differential- und Integralrechnung unterrichtet habe. Die Antwort ist

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 \ .$$

Der Beweis dafür ist auch gar nicht schwierig, nur etwas umständlich.[3]) Man kann nun sehr leicht verifizieren, dass gilt

$$(\Delta P)(r, \theta) \equiv 0.$$

Man muss dazu wegen der gleichmässigen Konvergenz die Reihe nur gliedweise nach r bzw. nach θ differenzieren und zeigen, dass sich in $(\Delta P)(r, \theta)$ die Terme paarweise wegheben.

Eine unendlich oft differenzierbare Funktion f mit $\Delta f = 0$ nennt man bekanntlich *harmonisch*. Vertauscht man die Ableitungen mit der Integration (was man hier wiederum ohne weiteres tun darf), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta(P * f)(r, \theta) &= \Delta \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta - t) f(t)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\Delta P)(r, \theta - t) f(t)\, dt \\ &= ((\Delta P) * f)(r, \theta) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Folglich ist auch $P * f$ harmonisch.

3) Siehe S. Lang: *Undergraduate Analysis*, p. 318, Exercises 6, 7.

Wir haben damit ein Problem gelöst, das in der Physik grosses Interesse beansprucht. Es sei auf der Peripherie des Einheitskreises eine stetige Funktion gegeben, welche wir als Funktion der Variablen θ ansehen. Wir betrachten die Kreisperipherie als Rand der Kreisscheibe mit Radius 1. Physiker interessieren sich dafür, eine stetige Funktion auf der Kreisscheibe zu finden, welche auf dem Rand dieselben Werte annimmt wie f und in der offenen Kreisscheibe harmonisch ist. Es zeigt sich, dass wir oben eine solche Funktion konstruiert haben, nämlich

$$F(r,\theta) = (P * f)(r,\theta) \ , \quad 0 \leq r < 1 \ , \quad \theta \in \mathbf{R} \ .$$

Wegen der Bedingung **DIR 3** gilt, wie wir wissen,

$$\lim_{r \to 1} F(r,\theta) = f(\theta),$$

so dass F in der Tat die stetige Randfunktion f ins Innere der Einheitskreisscheibe fortsetzt. Ferner haben wir gesehen, dass im Innern des Einheitskreises $\Delta F = 0$ gilt, so dass F dort, wie verlangt, harmonisch ist.

4 Harmonische Funktionen auf der oberen Halbebene

In diesem Beispiel betrachte ich die Familie von Funktionen

$$\phi_y(x) = \phi(y,x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \ , \quad y > 0 \ .$$

Die Familie $\{\phi_y\}$, $y > 0$ bildet auf $\mathbf{R}$ eine Diracfamilie für $y \to 0$. In der Tat sind die Eigenschaften **DIR 1**, **DIR 2**, **DIR 3** sehr einfach nachzuprüfen. Die dafür notwendigen kurzen Rechnungen überlassen wir dem Leser.

Aus unserem allgemeinen Approximationssatz für Diracfamilien ergibt sich, dass für jede stetige und beschränkte Funktion f das Faltungsprodunkt $\phi_y * f$ für $y \to 0$ gegen f konvergiert, und zwar gleichmässig auf jeder kompakten Teilmenge der x-Achse. Wiederum hat die Funktion $\phi(y,x)$ eine zusätzliche Eigenschaft: Sie ist harmonisch, $\Delta\phi = 0$. Dies folgt durch direkte partielle Ableitung. Auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Beispiel kann man daraus schliessen, dass auch das Faltungsprodukt $\phi * f$ harmonisch ist. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Es sei f eine auf der x-Achse definierte stetige und beschränkte Funktion, und es sei*

$$F(y,x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t)\, dt \ .$$

Dann ist F Lösung des Randwertproblems

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta F \equiv 0 & \textit{in der oberen Halbebene}, \\ \lim\limits_{y \to 0} F(y,x) = f(x) & \textit{für } x \in \mathbf{R} \ . \end{array} \right.$$

Dieser Satz besagt, dass die auf der x-Achse gegebene Funktion f zu einer harmonischen Funktion F auf der oberen Halbebene erweitert werden kann.

Wenn Sie bereits eine Vorlesung über Funktionentheorie gehört haben, so wissen Sie, dass es einen analytischen Isomorphismus der oberen Halbebene auf den Einheitskreis gibt, nämlich

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i} .$$

Unter dieser Abbildung entsprechen sich die in den beiden Beispielen 3 und 4 erwähnten Diracfamilien. Es ist eine gute Übungsaufgabe, dies zu verifizieren.

5 Wärmeleitung

Auf $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ betrachten wir in diesem Abschnitt den Wärmeleitungsoperator, also

$$L := -\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t} ,$$

wo wir $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ gesetzt haben.

Satz. *Die Familie $\{K_t\}$, definiert durch*

$$K_t(x) = K(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}, \quad t > 0,$$

ist eine Diracfamilie für $t \to 0$. Ferner gilt $LK = 0$, d.h. K erfüllt die Wärmeleitungsgleichung.

Der Nachweis der Axiome bietet hier keinerlei Probleme: Die Funktion K ist offenbar nichtnegativ. Damit ist **DIR 1** erfüllt. Die Verifizierung von **DIR 2**,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x)\,dx = 1 \quad ,$$

ist eine Übungsaufgabe der Integralrechnung. Man braucht dazu nur im Standardresultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

eine Variablentransformation auszuführen. Zum Nachweis der Bedingung **DIR 3** schliesslich verwendet man, dass die Funktion $e^{-x^2/4t}$ für $t \to 0$ schneller als $t^{1/2}$ gegen null strebt.

Die Tatsache $LK = 0$ verifiziert man durch einfaches Ableiten.

Die Anwendung unseres allgemeinen Satzes liefert nun das folgende Resultat: Ist f eine stetige Funktion, so gilt

$$K_t * f \to f \quad \text{für } t \to 0 .$$

Ausserdem folgt im Gebiet $x, t \in \mathbf{R}$, $t > 0$

$$L(K * f) = (LK) * f = 0 .$$

Es sei F eine stetige Funktion von zwei Variablen, $F = F(t,x)$, die für (t,x) mit $x, t \in \mathbf{R}$ und $t \geq 0$ definiert ist. Wir sagen, F erfülle die *Anfangsbedingungen mit Werten* f, wenn gilt $F(0,x) = f(x)$.

Wir setzen nun

$$F(t,x) = (K * f)(t,x) , \quad \text{für } t > 0 .$$

Nach unserem allgemeinen Approximationssatz gilt

$$\lim_{t \to 0} F(t,x) = f(x) .$$

Mit der Festsetzung $F(0,x) = f(x)$ wird F für $t > 0$ zu einer stetigen Fortsetzung der Funktion f. Man hat damit eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhalten, welche die Anfangsbedingungen mit Werten f erfüllt.

Alle angesprochenen Eigenschaften können auf $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n$ verallgemeinert werden: Dazu müssen wir den üblichen Laplaceoperator in $\mathbf{R}^n$ betrachten. Er ist definiert durch

$$\Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 .$$

Der zugehörige Wärmeleitungsoperator lautet dementsprechend

$$L := -\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t} .$$

Es sei F eine Funktion von $n+1$ Variablen, also

$$F = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(t,x) .$$

Zur Abkürzung setzen wir im folgenden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Wir sagen, dass F die Wärmeleitungsgleichung im n-dimensionalen Raum erfüllt, wenn gilt $LF = 0$.

Satz. *Die Familie*

$$K_t(x) = K(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-x^2/4t}$$

ist eine Diracfamilie für $t \to 0$. *Ferner gilt* $LK = 0$, *das heisst,* K *erfüllt die Wärmeleitungsgleichung.*

Statt $(4\pi t)^{-1/2}$ haben wir hier $(4\pi t)^{-n/2}$ als Faktor bei der Exponentialfunktion. Der Beweis für diese n-dimensionale Verallgemeinerung verläuft genau gleich wie derjenige für den eindimensionalen Fall; anstelle der gewöhnlichen Ableitung hat man einfach die partiellen Ableitungen zu nehmen.

Acknowledgment: I am very grateful to U. Stammbach for the care he has given to the translation and the publication of my talk.

Serge Lang
Yale University
New Haven
Connecticut 06520, USA