Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra

Autor(en): **Hopf, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **49 (1994)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-45431

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math. 49 (1994)

0013-6018/94/040137-12$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra[1]

Heinz Hopf

Trotz der Polarität der rein algebraischen und der rein topologischen Methoden, die man durch die Stichworte "diskret" und "kontinuierlich" anzudeuten pflegt, existieren bekanntlich zwischen Algebra und Topologie zahlreiche und verschiedenartige Zusammenhänge und Wechselwirkungen. Aus dem grossen Bereich dieser Beziehungen werde ich in diesem Vortrag einige spezielle Gegenstände auswählen; sie gehören alle demselben, im Prinzip alten Kapitel an: es sind Anwendungen topologischer Methoden in der klassischen, "unmodernen" Algebra, also der Algebra unter Zugrundelegung des Körpers der reellen Zahlen oder des Körpers der komplexen Zahlen, und dabei wird es sich im wesentlichen, mehr oder weniger explizit, um Existenzbeweise für Nullstellen von Polynomen oder Polynomsystemen handeln. Da es gerade die Begriffe der Stetigkeit sind, die den Körper aller reellen und den aller komplexen Zahlen vor den anderen algebraischen Körpern auszeichnen, ist es ja kein Wunder, dass sich topologische, also "stetigkeitsgeometrische" Methoden hier wirkungsvoll anwenden lassen. Übrigens gehören hierher natürlich Teile der klassischen algebraischen Geometrie, so die Schnittpunktsätze und ihre Konsequenzen; aber ich möchte in meinem Vortrage nicht über Dinge sprechen, die allen Kennern der algebraischen Geometrie geläufig sind. Vielmehr ist es meine Absicht, nicht nur noch einmal die Anwendbarkeit topologischer Methoden in der Algebra zu beleuchten, sondern zugleich auch die Aufmerksamkeit der Algebraiker auf einige weniger bekannte algebraische Sätze und Probleme zu lenken, die im Laufe topologischer Untersuchungen sichtbar geworden sind.

Der vorliegende Beitrag erschien erstmals in der Zeitschrift "Rendiconti del Seminario Matematico, Università e Politecnico Torino" 11 (1952), p. 75–91. Die Elemente der Mathematik danken für die Erlaubnis, ihn hier aus Anlass des hundertsten Geburtstages von Heinz Hopf abzudrucken. — Es handelt sich bei dem Artikel im wesentlichen um das Manuskript eines Vortrages, welchen Heinz Hopf im Frühjahr 1952 an den Universitäten Turin und Genua gehalten hatte. Hopfs erstaunliche Fähigkeit, komplizierte mathematische Zusammenhänge anschaulich darzustellen, kommt hier meisterlich zur Geltung.

1) Vortrag, gehalten an den Universitäten Turin und Genua im Frühjahr 1952.

1. — Das älteste Beispiel für die Anwendung einer topologischen Methode beim Beweis eines algebraischen Satzes dürfte die Überlegung sein, durch welche man beweist, dass jedes reelle Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

dessen Grad n ungerade ist, eine reelle Nullstelle besitzt; im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen stelle ich den Gang dieser bekannten Überlegung ausführlich dar: Setzen wir

$$g(x) = x^n\ , \quad h(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{1.2}$$

so dass also

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{1.3}$$

ist, so ist

$$|h(x)| < |g(x)| \ \text{ für grosse } \ |x|, \tag{1.4}$$

also

$$\operatorname{sign}.\, f(x) = \operatorname{sign}.\, g(x) \ \text{ für grosse } \ |x|. \tag{1.5}$$

Da n ungerade ist, hat $g(x) = x^n$ immer dasselbe Vorzeichen wie x, und daher folgt aus (1.5):

$$f(r) > 0, \quad f(-r) < 0 \quad \text{für grosse positive } r\ . \tag{1.6}$$

Soweit hat der Beweis algebraischen Charakter; jetzt aber benutzen wir die Stetigkeit von f und wenden den Satz von Bolzano an, also den folgenden topologischen Satz, dem ich den Namen $\mathfrak{L}_1$, geben will: "Die auf einem Intervall E stetige reelle Funktion f habe in den beiden Endpunkten von E Werte mit verschiedenen Vorzeichen; dann besitzt f in E eine Nullstelle." Hieraus und aus (1.6) folgt die Existenz einer Nullstelle unseres Polynoms $f(x)$.

Ganz analog ist der Gedankengang des folgenden bekannten Beweises für den "Fundamentalsatz der Algebra", also für den Satz, dass jedes komplexe Polynom positiven Grades eine Nullstelle besitzt: In (1.1) seien die a_i komplexe Zahlen, x eine komplexe Variable; mit den Definitionen (1.2) gelten (1.3) und (1.4) wie oben. Die obigen Aussagen über gewisse Vorzeichen werden jetzt ersetzt durch Aussagen über "Umlaufzahlen": wir betrachten die durch $y = f(x)$ bezw. $y = g(x)$ vermittelten Abbildungen der komplexen x-Ebene in eine komplexe y-Ebene (dabei dürfen im Augenblick f und g beliebige stetige Funktionen sein); durchläuft x den durch $|x| = r$ gegebenen Kreis S_r, so macht der Bildpunkt $f(x)$ eine gewisse Anzahl von Umläufen (gleich der durch 2π dividierten Änderung seines Winkelargumentes) um den Punkt $y = 0$; diese Anzahl bezeichnen wir mit $C[f(S_r)]$, und analog ist $C[g(S_r)]$ erklärt (dabei nehmen wir übrigens an, dass der Punkt $y = 0$ nicht auf $f(S_r)$ bezw. $g(S_r)$ liegt). Eine elementare geometrische Betrachtung, die man das Prinzip von Rouché nennt, zeigt: ist $f(x) = g(x) + h(x)$ und $|h(x)| < |g(x)|$ für $|x| = r$, so ist $C[f(S_r)] = C[g(S_r)]$. — Für unsere Polynome f und g folgt somit auf Grund von (1.4) in Analogie zu (1.5):

$$C[f(S_r)] = C[g(S_r)] \ \text{ für grosse } \ r. \tag{1.5'}$$

Aus $g(x) = x^n$ folgt offenbar

$$C[g(S_r)] = n \quad \text{für jedes} \quad r > 0; \tag{1.7}$$

daher folgt weiter, in Analogie zu (1.6):

$$C[f(S_r)] = n \neq 0 \quad \text{für grosse} \quad r. \tag{1.6'}$$

Jetzt benutzen wir den folgenden topologischen Satz $\mathfrak{L}_2$, der als eine direkte Verallgemeinerung des elementaren Satzes $\mathfrak{L}_1$ gelten darf: "f sei eine solche stetige Abbildung der von S_r berandeten Kreisscheibe E in die y-Ebene, dass $C[f(S_r)] \neq 0$ ist; dann gibt es in E einen Punkt, der durch f auf den Nullpunkt der y-Ebene abgebildet wird." Hieraus und aus (1.6′) folgt die Existenz einer Nullstelle unseres Polynoms $f(x)$.[2]) Ich werde den Satz $\mathfrak{L}_2$ hier nicht beweisen, wie ich überhaupt in diesem Vortrage niemals Beweise topologischer Sätze, sondern immer nur die Zurückführung algebraischer auf topologische Sätze besprechen werde. Der Satz $\mathfrak{L}_2$ ist nur ein Spezialfall eines Satzes $\mathfrak{L}_k$, der von stetigen Abbildungen eines k-dimensionalen euklidischen Raumes in einen ebensolchen Raum handelt; von diesem allgemeinen Satz und seinen Anwendungen will ich jetzt noch sprechen. Es seien also der x-Raum und der y-Raum k-dimensionale euklidische Räume; wir benutzen in ihnen die additive Vektorschreibweise und verstehen unter $|x|$ und $|y|$ die euklidischen Normen. S_r sei die durch $|x| = r$ gegebene $(k-1)$-dimensionale Kugelfläche, E die von ihr begrenzte k-dimensionale Vollkugel, f eine stetige Abbildung von E in den y-Raum, wobei der Punkt $y = 0$, den ich kurz o nenne, nicht auf dem Bilde $f(S_r)$ liegen soll; dann definiert man die Zahl $C[f(S_r)]$, die man die "Ordnung von o in bezug auf $f(S_r)$" oder auch die "Kroneckersche Charakteristik von f auf S_r" nennt, folgendermassen: sie ist der Brouwersche Abbildungsgrad derjenigen Abbildung von S_r, auf die durch $|y| = 1$ bestimmte Kugelfläche S_1' im y-Raum, welche entsteht, wenn man $f(S_r)$ von o aus auf S_1' projiziert (und der Abbildungsgrad lässt sich charakterisieren als die Anzahl der positiven Bedeckungen von S_1' durch das Bild von S_r, vermindert um die Anzahl der negativen Bedeckungen). Für $k = 2$ ist dies, wie man leicht sieht, die alte Umlaufzahl. Nun lautet der Satz $\mathfrak{L}_k$, den man auch den "Kroneckerschen Existenzsatz" nennt: "Es sei $C[f(S_r)] \neq 0$; dann gibt es in E einen Punkt x mit $f(x) = 0$."[3])

Dieser Satz gestattet zahlreiche Anwendungen auf Existenzsätze für Nullstellen von Funktionensystemen, und zwar besonders dann, wenn man ihn mit dem vorhin formulierten Prinzip von Rouché kombiniert, das für den k-dimensionalen Raum genau so lautet und genau so zu beweisen ist wie für die Ebene. Insbesondere erhält man durch ganz dieselben Schlüsse, die uns vorhin zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geführt haben, jetzt den folgenden Satz: "Es sei f eine stetige Abbildung des ganzen x-Raumes in den y-Raum; sie lasse sich (bei vektorieller Schreibweise) in der Form (1.3) darstellen, wobei (1.4) gelte; ferner sei

$$C[g(S_r)] \neq 0 \qquad (\text{für grosse } r). \tag{1.8}$$

2) In den üblichen Darstellungen des Beweises benutzt man anstelle des topologischen Satzes $\mathfrak{L}_2$ den funktionentheoretischen Satz: "Wenn f analytisch ist, so ist $C[f(S_r)] = (2\pi i)^{-1} \oint f^{-1} f' \, dz$ = Anzahl der Nullstellen von f in E."

3) Man vergleiche Alexandroff-Hopf, *Topologie I* (Berlin 1935). 12. Kap. §§1.2.

Dann gibt es einen Punkt x mit $f(x) = 0$."

Als spezielles Beispiel zu diesem Satz will ich noch den *"Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen"* besprechen, der von *Eilenberg* und *Niven* stammt[4]): Es seien a_i Hamiltonsche Quaternionen und x eine Quaternionen-Variable; ein "Monom vom Grade n" ist ein Produkt $a_0 x a_1 x \ldots a_{n-1} x a_n$, wobei die $a_i \neq 0$ sind, und ein Polynom in x ist eine Summe von endlich vielen Monomen; dabei beachte man, dass infolge der Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes die Summe zweier Monome gleichen Grades im allgemeinen kein Monom ist. Der "Fundamentalsatz" lautet: *"Das Quaternionen-Polynom $f(x)$ enthalte genau ein Monom vom Grade n, während alle anderen Monome kleineren Grad haben; dann gibt es eine Quaternion x_0, für welche $f(x_0) = 0$ ist."*

Für den Beweis dieses Satzes verstehe man unter $g(x)$ das in $f(x)$ enthaltene Monom n-ten Grades und definiere $h(x)$ durch (1.3); dann bestätigt man ganz leicht, dass (1.4) gilt; zu beweisen bleibt (1.8), und es ist in der Tat nicht sehr schwer zu zeigen, dass (1.7) und daher auch (1.8) gilt.

Auf weitere Anwendungen des Kroneckerschen Existenzsatzes will ich hier nicht eingehen; viele dieser Anwendungen führen eher in die Analysis als in die Algebra. Ich will jetzt lieber von Anwendungen topologischer Methoden in der *linearen* Algebra sprechen.

2. — Ein gutes Beispiel einer einfachen Anwendung der Topologie in der linearen Algebra ist das folgende: mit Hilfe des klassischen Brouwerschen Fixpunktsatzes, welcher besagt, dass jede stetige Abbildung eines Simplexes beliebiger Dimension in sich einen Fixpunkt besitzt[5]), beweist man leicht den folgenden Satz von Frobenius: *"Jede quadratische Matrix mit lauter reellen nicht-negativen Elementen besitzt einen reellen nicht-negativen Eigenwert"*.

Es sei in der Tat (a_{ij}) eine reelle quadratische Matrix vom Grade n mit $a_{ij} \geq 0$; wir setzen $\sum a_{ij} x_j = f_i(x)$ für jedes reelle Wertsystem $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und haben zu zeigen, dass es eine Zahl $\lambda \geq 0$ und ein Wertsystem $x \neq (0, \ldots, 0)$ so gibt, dass

$$f_i(x) = \lambda x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

gilt. Wir dürfen annehmen, dass es kein Wertsystem $x \neq (0, \ldots, 0)$ gibt, für das alle $f_i = 0$ sind, da ein solches eine Lösung von (2.1) mit $\lambda = 0$ ist. Wir deuten $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ als Koordinaten des $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes P; dann ist durch

$$x_i = f_i(x)$$

eine Abbildung $x' = f(x)$ von P in sich definiert, die das $(n-1)$-dimensionale Simplex T, das durch

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

gegeben ist, in sich transformiert. In T gibt es einen Fixpunkt von f; für ihn gilt (2.1), und dabei ist, da alle $x_i \geq 0$ und alle $f_i \geq 0$, aber nicht alle $x_i = 0$ sind, $\lambda \geq 0$ (und auf Grund unserer obigen Annahme sogar $\lambda > 0$).

---

4) S. Eilenberg und I. Niven, The *Fundamental theorem of Algebra* for Quaternions. Bulletin Am. Math. Soc. 50 (1944).

5) Beweise bei Alexandroff-Hopf, l.c., pp. 377, 480, 532.

Damit ist der Satz von Frobenius bewiesen, aber nicht nur dieser Satz, sondern folgende Verallgemeinerung: "Die reellen Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ der reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ seien überall stetig und für positive x nicht negativ; dann gibt es eine Zahl $\lambda \geq 0$ und ein Wertsystem $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ mit $x_i \geq 0$ für alle i, so dass (2.1) gilt." Die Voraussetzungen sind z.B. erfüllt, wenn die f_i Polynome mit positiven Koeffizienten sind; dann hat man einen neuen algebraischen Satz.

3. — Als Ausgangspunkt für weitere Anwendungen der Topologie auf Existenzsätze für reelle Eigenwerte und auf verwandte Sätze der linearen Algebra kann uns die elementare Tatsache dienen, dass eine reelle quadratische Matrix von ungeradem Grade immer einen reellen Eigenwert besitzt. Obwohl dieser Satz ja einfach daraus folgt, dass die charakteristische Gleichung der Matrix ungeraden Grad hat und daher eine reelle Wurzel besitzt, und obwohl es sich also an und für sich kaum lohnt, noch nach anderen Beweisen zu suchen, will ich den Satz doch noch durch eine andersartige topologische Betrachtung begründen, da diese Betrachtung uns zu gewissen Verallgemeinerungen führen wird, die nicht ganz naheliegen.

Die topologischen Sätze, die hier ins Spiel kommen, handeln von tangentialen stetigen Richtungsfeldern auf Sphären. Auf der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre S^{n-1}, die etwa im euklidischen $(x_1, \ldots, x_n)$-Raum R^n durch $\sum x_i^2 = 1$ gegeben sei, kann man, wenn n gerade ist, ein stetiges tangentiales Richtungsfeld dadurch konstruieren, dass man im Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ immer den Vektor $\{-x_2, x_1, \ldots, -x_n, x_{n-1}\}$ anbringt; für ungerades n aber ist etwas Ähnliches nicht möglich, denn es gilt der berühmte, von Poncaré für $n = 3$, von Brouwer für die grösseren n bewiesene Satz, den ich kurz den "Tangentensatz" nennen will: "Bei ungeradem n gibt es auf der Sphäre S^{n-1} kein tangentiales stetiges Richtungsfeld ohne Singularitäten." Hieraus ergibt sich leicht der folgende Satz, den man manchmal den "Igelsatz" nennt (da er für $n = 3$ eine Aussage über die Stacheln eines Igels enthält): "Bei ungeradem n gibt es in jedem Richtungsfeld auf der S^{n-1}, das überall stetig (und daher im allgemeinen nicht tangential) ist, eine Normalenrichtung der S^{n-1}." Denn andernfalls würden die Tangentialkomponenten der Richtungen ein stetiges Tangentenfeld bilden, entgegen dem Tangentensatz[5a]).

Die Existenz eines reellen Eigenwertes einer reellen quadratischen n-reihigen Matrix $A = (a_{ij})$ bei ungeradem n ist ein Korollar des Igelsatzes: in jedem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der S^{n-1} bringe man den Vektor $\mathfrak{p}' = A\mathfrak{p}$ an, also denjenigen, der aus dem Vektor $\mathfrak{p} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ durch die lineare Transformation A hervorgeht; falls A singulär ist, ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert; ist A regulär, so bilden die $\mathfrak{p}'$ ein stetiges Richtungsfeld auf S^{n-1}; nach dem Igelsatz gibt es eine Stelle x, an der $\mathfrak{p}'$ die Richtung der Normalen, also auch die Richtung von $\mathfrak{p}$ hat; dort ist $\mathfrak{p}' = A\mathfrak{p} = \lambda\mathfrak{p}$; dann ist λ ein Eigenwert von A.

In neuerer Zeit hat man nun, veranlasst durch die oben festgestellte Tatsache, dass es auf einer Späre S^{n-1} mit geradem n immer ein stetiges Tangentenfeld gibt, gefragt, ob man auf einer solchen Sphäre nicht vielleicht noch ein zweites, von dem ersten linear unabhängiges Feld anbringen könne, und vielleicht noch ein drittes usw.; die Frage lässt sich so präzisieren: "Wie gross ist, bei gegebenem n, die Maximalzahl stetiger Tangentenfelder auf der S^{n-1}, welche überall linear unabhängig sind?" Es ist zwar bisher

5a) L.c. ([5]), p. 481.

nicht gelungen, diese Maximalzahl für beliebiges n anzugeben, aber man hat immerhin folgenden Satz bewiesen: "Es sei

$$n = 2^m \cdot q, \qquad q \text{ ungerade}, \tag{3.1}$$

und auf der S^{n-1} gebe es $r-1$ stetige, überall linear unabhängige Tangentenfelder; dann ist

$$r \leq 2^m, \tag{3.2}$$

also die Anzahl der Felder kleiner als 2^m." Für ungerades n, also für $2^m = 1$, ist dies der alte Tangentensatz; für $n = 4k+2$, also für $2^m = 2$, besagt der Satz, dass es für je zwei stetige Tangentenfelder auf der S^{4k+1} einen Punkt gibt, in dem die beiden Feldrichtungen gleich oder entgegengesetzt sind; usw. — In der soeben formulierten Allgemeinheit ist der Satz erst 1951 von *J.H.C. Whitehead* bewiesen worden[6]); aber schon vorher hatte *E. Stiefel* denselben Satz für Richtungsfelder im $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raum bewiesen oder, was dasselbe ist, für solche Felder auf der Sphäre S^{n-1}, die bei Spiegelung am Mittelpunkt der Sphäre in sich übergehen; aus diesem speziellen Satz hat Stiefel die algebraischen Folgerungen gezogen, von denen wir jetzt sprechen werden.[7])

Es seien $A_1, \ldots, A_r$ reelle quadratische Matrizen von Grade n; sie spannen die lineare Schar der Matrizen

$$y_1 A_1 + \cdots + y_r A_r \tag{3.3}$$

mit beliebigen, reellen Parametern $y_1, \ldots, y_r$ auf; wir nennen die Schar "regulär", wenn alle Matrizen (3.3), ausser derjenigen mit $(y_1, \ldots, y_r) = (0, \ldots, 0)$, regulär sind; dann gilt der Satz: "*Es gelte* (3.1), *und es gebe eine reguläre Schar* (3.3) *mit r Parametern; dann gilt* (3.2)."

Wir wollen diesen Satz sogleich auf den obigen Satz über Tangentenfelder auf Sphären zurückführen: Da die Schar (3.3) regulär ist, ist speziell die Matrix A_r regulär; es existiert also die reguläre Matrix A_r^{-1}, und da sich nichts ändert, wenn wir alle Matrizen mit einer festen regulären Matrix, also z.B. mit A_r^{-1}, multiplizieren, dürfen wir von vornherein annehmen, dass $A_r = E$ (Einheitsmatrix) ist. Für jeden Einheitsvektor $\mathfrak{p}$ des R^n betrachten wir die Vektoren $A_i\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ (also die Vektoren, in die $\mathfrak{p}$ durch die linearen Abbildungen A_i übergeht); wir deuten $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_r$ als Ortsvektor eines Punktes x der S^{n-1} und bringen in x die Vektoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$ an; die Tangentialkomponenten der $\mathfrak{p}_i$ bezüglich der S^{n-1} sind dann die Vektoren $\mathfrak{p}_i' = \mathfrak{p}_i - (\mathfrak{p}_i\mathfrak{p})\mathfrak{p}$. Nun folgt erstens aus der Regularität der Matrizenschar (3.3) die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}, \mathfrak{p}$, und zweitens hieraus die lineare Unabhängigkeit der $r-1$ Vektoren $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}'$. Es gibt also auf S^{n-1} ein System von $r-1$ linear unabhängigen stetigen Richtungsfeldern; folglich gilt (3.2).

Der somit bewiesene Satz über Matrizenscharen besagt für ungerades n, also für $2^m = 1$, dass dann bereits jede 2-parametrige Schar eine singuläre Matrix enthält, und diese

6) N.E. Steenrod and J.H.C. Whitehead, *Vector fields on the n-sphere*. Proc. Nat. Acad. Sci. 37 (1951).

7) E. Stiefel, *Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra*. Comment. Math. Helvet. 13 (1941). — Man vergl. auch H. Hopf, *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra*, ibidem.

Aussage ist identisch mit dem alten Satz über die Existenz eines reellen Eigenwertes einer Matrix ungeraden Grades; für $n = 4k+2$, also $2^m = 2$, besagt unser Satz, dass jede 3-parametrige Schar eine singuläre Matrix oder, was damit äquivalent ist, dass jede 2-parametrige Schar eine Matrix mit einem reellen Eigenwert enthält — usw. Ferner heben wir das folgende Korollar unseres Satzes hervor: "*Eine n-parametrige reguläre Schar n-reihiger Matrizen kann es höchstens dann geben, wenn $n = 2^m$ ist.*" — Die Frage, ob es für jedes n eine 2^m-parametrige reguläre Schar n-reihiger Matrizen gibt, ist offen — wahrscheinlich ist sie zu verneinen; eine Klärung dieser Frage wäre aufschlussreich sowohl für die Algebra als auch für die Topologie.

Der Fall $r = n$, von dem das soeben formulierte Korollar handelt, spielt eine Rolle bei der Untersuchung der nicht notwendigerweise assoziativen Divisions-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen. Eine solche Algebra vom Grade n ist bekanntlich so erklärt: man hat den n-dimensionalen reellen Vektorraum R^n mit seinen gewöhnlichen Operationen und ausserdem in ihm eine Multiplikation der Vektoren, die distributiv mit der Addition verknüpft ist; sie erfüllt ferner folgende Regel, wobei $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ Vektoren, a, b Zahlen sind: $(a\mathfrak{x}) \cdot (b\mathfrak{y}) = (ab) \cdot (\mathfrak{x}\mathfrak{y})$; schliesslich soll die Division durch jeden von 0 verschiedenen Vektor eindeutig ausführbar sein, was gleichbedeutend damit ist, dass es keine Nullteiler gibt. Dagegen braucht das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht zu gelten. Dass wir uns hier auch für nicht-assoziative Algebren interessieren, ist sowohl dadurch gerechtfertigt, dass nicht-assoziative Strukturen (z.B. "loops") heute ohnehin den Gegenstand algebraischer Untersuchungen bilden, als auch besonders dadurch, dass es eine nicht-assoziative Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen gibt, die aus algebraischen und aus geometrischen Gründen wichtig und interessant ist: das System der Cayleyschen Oktaven; es hat den Grad 8.[8])

Nach einem klassischen Satz von Frobenius bilden die komplexen Zahlen und die Quaternionen die einzigen Divisions-Algebren über dem reellen Körper, welche assoziativ sind; dann ist also $n = 2$ oder $n = 4$. Ein Satz von Hurwitz (über Multiplikationstheoreme von Quadratsummen)[9]) lehrt: die einzigen Algebren (nicht notwendigerweise assoziativ), in welchen die Normenproduktregel $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}| = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}|$ gilt (die die Nicht-Existenz von Nullteilern, also die Divisions-Eigenschaft impliziert), sind die Systeme der komplexen Zahlen, der Quaternionen und der Cayleyschen Oktaven; dann ist also $n = 2, 4$ oder 8. Ob es noch für andere Grade n als $2, 4, 8$ Divisions-Algebren (in denen dann weder das assoziative Gesetz noch die Normenproduktregel gelten kann) über dem reellen Körper gibt, ist nicht bekannt; zu diesem Problem liefert aber die im Vorstehenden besprochene Theorie von Stiefel folgenden Beitrag: "*Der Grad einer solchen Algebra ist notwendigerweise eine Potenz von 2.*"

In der Tat: Seien $n_1, \ldots, n_n$ Basisvektoren eines solchen Systems und ihre Produkte durch

$$n_i n_j = \sum a_{ij}^k n_k \tag{3.4}$$

8) Man vergl. etwa L.E. Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927), §133.

9) A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.* Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898 (= Math. Werke, Bd. II (Basel 1933), p. 565).

gegeben, so dass also für $\mathfrak{x} = \sum x^i n_i$, $\mathfrak{y} = \sum y^j n_j$ das Produkt durch

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \sum z^k n_k, \quad z^k = \sum x^i y^j a_{ij}^k$$

bestimmt ist. Es sei $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{y} \neq 0$, also

$$\sum_i \left(\sum_j y^j a_{ij}^k \right) x^i = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

und $(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Da es keine Nullteiler gibt, wird das Gleichungssystem (3.5) nur durch $\mathfrak{x} = (0, \ldots, 0)$ befriedigt, die Matrix $\left(\sum_j y^j a_{ij}^k\right)$ ist also regulär. Diese Matrix ist gleich

$$y^1 A_1 + \ldots + y^n A_n \quad \text{mit} \quad A_j = (a_{ij}^k),$$

(wobei also i, k die Zeilen- und Spalten-Indices sind). Wir haben somit eine n-parametrige reguläre Schar n-reihiger Matrizen; daher ist, wie wir vorhin gesehen haben, $n = 2^m$.

Ob es aber derartige Algebren mit $n = 2^m \geq 16$ gibt, ist nicht bekannt.

4. — Ich will jetzt einen algebraischen Satz, der ganz in den soeben besprochenen Problemkreis gehört, mit einer topologischen Methode beweisen, die von der bisherigen vollständig verschieden ist.

Fügen wir den Postulaten für die "nicht notwendigerweise assoziativen Divisions-Algebren über dem reellen Körper" noch die Forderung hinzu, dass die Multiplikation kommutativ sein soll, dann wird die Situation natürlich radikal vereinfacht, und es ist nicht zu verwundern, dass es dann keine offenen Probleme mehr gibt. In der Tat gilt der Satz[10]): *"Eine kommutative Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen, assoziativ oder nicht, hat den Grad* 2*."*

Wenn wir überdies die Forderung hinzunehmen, dass die Algebra ein Eins-Element enthalten soll, dann folgt aus diesem Satz durch ganz elementare Schlüsse weiter, dass die Algebra der Körper der komplexen Zahlen ist; man kann also sagen: Für eine Algebra (endlichen Grades) über dem Körper der reellen Zahlen ist das assoziative Gesetz der Multiplikation eine Folge aus der Divisions-Eigenschaft (Nicht-Existenz von Nullteilern), dem kommutativen Gesetz und der Existenz einer Eins.

Ich komme zu dem topologischen Beweis unseres Satzes. Die in dem Satz ausgedrückte Auszeichnung der Zahl 2 vor allen grösseren Zahlen wird sich dabei folgendermassen äussern: Für $n = 2$, aber nicht für $n > 2$, sind die $(n-1)$-dimensionale Sphäre S^{n-1} und der $(n-1)$-dimensionale reelle projektive Raum P^{n-1} miteinander homöomorph (topologisch äquivalent); in der Tat sind sowohl die Kreislinie S^1 als auch die projektive Gerade P^1 einfach geschlossene Linien, während für $n > 2$ zwar die Sphäre S^{n-1} einfach zusammenhängend ist (d.h. dass man auf ihr jeden geschlossenen Weg in einen Punkt

10) H. Hopf, *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume*, Vierteljahrsschrift Naturf. Ges. Zürich, LXXXV (1940), (= Festschrift *Rudolf Fueter*), p. 165.

deformieren kann), aber nicht der projektive Raum P^{n-1} (da in ihm z.B. eine projektive Gerade nicht zusammenziehbar ist).

Wir nehmen nun eine Algebra vom Grade n, die alle vorausgesetzten Eigenschaften hat. In dem Raum R^n, dessen Vektoren die Elemente der Algebra sind, sei o der Nullpunkt; das Bündel der Geraden durch o repräsentiert einen P^{n-1}, die Mannigfaltigkeit der von o ausgehenden Halbstrahlen eine S^{n-1}. Es sei q eine Abbildung des R^n in sich, die jedem Vektor $\mathfrak{x}$ sein Quadrat $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2$ (im Sinne der Multiplikation in unserer Algebra) zuordnet: $q(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^2$. Für jede reelle Zahl c ist $q(c\mathfrak{x}) = c^2\mathfrak{x}^2$; daher bildet q jede Gerade durch o in einen von o ausgehenden Halbstrahl ab; es wird also eine Abbildung Q von P^{n-1} in S^{n-1} bewirkt. Q ist natürlich stetig; ich behaupte: Q ist eineindeutig. In der Tat: Seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zwei Vektoren, deren Geraden in denselben Halbstrahl abgebildet werden; dann unterscheiden sich $q(\mathfrak{x})$ und $q(\mathfrak{y})$ nur durch einen reellen Faktor, der nicht negativ ist und den wir daher c^2 nennen dürfen:

$$\mathfrak{y}^2 = c^2\mathfrak{x}^2;$$

infolge der Kommutativität

$$\mathfrak{y}^2 - c^2\mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{y} + c\mathfrak{x})(\mathfrak{y} - c\mathfrak{x}),$$

also ist

$$(\mathfrak{y} + c\mathfrak{x})(\mathfrak{y} - c\mathfrak{x}) = 0$$

und, da es keine Nullteiler gibt,

$$\mathfrak{y} = \pm c\mathfrak{x};$$

das heisst: $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ liegen auf derselben Geraden. Wir haben also eine stetige und eineindeutige Abbildung Q von P^{n-1} in S^{n-1}; nun sind aber P^{n-1} und S^{n-1} geschlossene Mannigfaltigkeiten, und aus ganz einfachen und allgemeinen topologischen Tatsachen folgt daher, dass Q eine Homöomorphie ist. Mithin ist $n - 1 = 1$, $n = 2$.

Damit ist unser Satz bewiesen. Ich möchte bemerken, dass ich für ihn keinen Beweis kenne, der mit üblichen algebraischen Methoden und ohne Topologie arbeitet; einen solchen Beweis zu finden, halte ich für eine interessante Aufgabe, von der ich mir, im Hinblick auf die Einfachheit sowohl des Satzes selbst als auch unseres topologischen Beweises, nicht denken kann, dass es allzu schwierig ist.

5. — Man kann unseren eben bewiesenen Satz so wenden, dass eine neue algebraische Fragestellung sichtbar wird, die sich ebenfalls topologisch angreifen lässt.

Unser Satz besagt: "Es sei $n > 2$, und man habe über dem Körper der reellen Zahlen eine Algebra n-ten Grades, die nicht notwendigerweise assoziativ, aber kommutativ ist; dann besitzt diese Algebra Nullteiler." Benutzen wir denselben Formalismus wie am Ende von Nr. 3, so dass also die Multiplikation durch (3.4) gegeben ist; dann sind die n Matrizen

$$A^k = (a_{ij}^k), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

(wobei jetzt i, j die Zeilen- und Spalten-Indices sind) infolge der Kommutativität der Multiplikation symmetrisch; ich benutze die Symbole A^k gleichzeitig als Funktionszeichen für die symmetrischen Bilinearformen

$$A^k(x,y) = \sum a_{ij}^k x^i y^j.$$

Die Existenz von Nullteilern bedeutet, dass das Gleichungssystem (3.5), also das System

$$A^k(x,y) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

ein Lösungspaar $x \neq (0, \ldots, 0)$, $y \neq (0, \ldots, 0)$ besitzt. Das heisst in geometrischer Sprache: *"Im reellen projektiven Raum P^d der Dimension $d = n - 1 > 1$ seien durch die Gleichungen*

$$A^k(x,x) = 0 \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$d + 1$ Flächen 2. Ordnung gegeben; dann gibt es zwei reelle Punkte x, y, die in bezug auf jede dieser Flächen zueinander polar sind."

Dieser Satz ist äquivalent mit unserem Satz in Nr. 4 über kommutative Divisions-Algebren. Jetzt aber entsteht die natürliche Frage, ob dieselbe Behauptung — nämlich die Existenz von zwei Punkten, die bezüglich aller gegebenen Flächen polar sind — nicht auch gültig bleibt, wenn man mehr als $d + 1$ Flächen hat; dies ist nun in der Tat der Fall; es gilt nämlich folgender Satz: *"Im reellen projektiven Raum P^d, $d > 1$, seien s reelle Flächen 2. Ordnung gegeben; dann ist jede der nachstehenden Bedingungen* (A) *und* (B) *hinreichend für die Existenz eines reellen Punktpaares x, y, welches sich in bezug auf jede dieser Flächen in polarer Lage befindet:*

$$s \leq d + 2; \tag{A}$$

$$s \leq 2^t - 1, \quad \textit{wobei} \;\; 2^{t-1} \leq d < 2^t \;\; \textit{ist."} \tag{B}$$

Die Bedingung (A) bedeutet für alle d, die Bedingung (B) bedeutet für die meisten d — nämlich für diejenigen, die nicht gleich $2^t - 1$ oder gleich $2^t - 2$ sind — eine Verschärfung unseres früheren Satzes über $d + 1$ Flächen; für die meisten d ist die Bedingung (B) viel besser als (A), das heisst: man darf meistens viel mehr als $d + 2$ Flächen zulassen. Welches die grösste Zahl $s^* = s^*(d)$ ist, für welche die Existenz eines Punktpaares x, y der genannten Art für jedes System von s^* Flächen gesichert ist, weiss ich nicht — ich möchte auf dieses Problem aus der reellen algebraischen Geometrie hier hinweisen.

Was die Beweise von (A) und (B) betrifft, so lässt sich (A) durch eine Verschärfung unserer topologischen Betrachtung aus Nr. 4 begründen; anstelle der Tatsache, dass für $n > 2$ der projektive Raum P^{n-1} nicht mit der Sphäre S^{n-1} homöomorph ist, benutzt man die schärfere Tatsache, dass P^{n-1} kein topologisches Modell im euklidischen Raum R^n besitzt*). Die Bedingung (B) ergibt sich aus einem Satz von Stiefel im Rahmen der

*) siehe Fussnote 10

Theorie, von der in Nr. 3 die Rede war, den wir aber dort nicht formuliert haben**). Wegen der Einzelheiten verweise ich auf die Literatur — ich möchte meine ohnehin schon recht langen Ausführungen nicht noch weiter ausdehnen[11]).

6. — Nur einige Bemerkungen prinzipieller Art will ich noch machen. Wir haben hier von algebraischen Sätzen gesprochen, die man mit topologischen Mitteln beweisen kann und die übrigens auch fast alle auf topologischen Wegen entdeckt worden sind. Nun darf es zwar, wie ich schon in der Einleitung gesagt habe, wohl als sachgemäss gelten, dass man in der Algebra über dem Körper der reellen Zahlen (oder auch, was schliesslich nichts anderes ist, über dem Körper der komplexen Zahlen) topologische Hilfsmittel benutzt, da ja in der Definition der reellen Zahlen Stetigkeitsbegriffe vorkommen; trotzdem ist es, wenn man im Laufe topologischer Untersuchungen Sätze von der Art unserer algebraischen Sätze in Nr. 3, 4, 5 entdeckt hat, auch verständlich, dass man noch nicht ganz befriedigt ist, sondern wünscht, für dieselben Sätze, die doch unleugbar einen gewissen "algebraischen" Charakter haben, auch "algebraische Beweise" zu finden. Hier aber muss man wohl etwas weiter ausholen und zunächst einmal fragen, was denn hier unter einem algebraischen Satz und unter einem algebraischen Beweis zu verstehen sei. Ich habe bei verschiedenen Gelegenheiten dazu folgenden Vorschlag gemacht (wobei man, um sich nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, immer die Sätze, die wir hier besprochen haben, im Auge behalten möge): "Man ersetze in der Formulierung der Sätze den Körper der reellen Zahlen durch einen reell-abgeschlossenen Körper im Sinne der Theorie von Artin-Schreier[12]) und beweise die so entstehenden allgemeineren Behauptungen." In der Tat wird ja auf diese Weise das Archimedische Axiom, also das wesentliche Stetigkeitsaxiom, ausgeschaltet. Für den Satz aus Nr. 3 und für andere damit zusammenhängende Sätze, auf die ich nicht eingegangen bin, ist die so formulierte Aufgabe von F. Behrend gelöst worden[13]). Andere rein algebraische Beweise für topologisch entdeckte Sätze hat — im Sinne meines Vorschlages — W. Habicht gefunden[14]). Dagegen ist für den Satz aus Nr. 4 das Analoge, soviel ich weiss, bisher nicht gelungen (worüber ich mich, wie ich schon am Schluss von Nr. 4 angedeutet habe, wundere, zumal die topologischen Tatsachen, die in Nr. 4 auftreten, viel einfacher sind als diejenigen in Nr. 3).

Diese Fragestellung hat eine ganz neue und, wie ich finde, sehr überraschende Wendung durch die Ergebnisse beweistheoretischer Untersuchungen von A. Tarski erhalten[15]); für

---

**) siehe Fussnote 7

11) Weitere in den Rahmen dieses Vortrages passende Sätze und Beweise findet man ausser in den in Fussnote 7 zitierten auch in den folgenden Arbeiten: H. Hopf und M. Rueff, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären*, Comment. Math. Helvet. 11 (1939). — B. Eckmann, *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*, Comment. Math. Helvet. 15 (1943); sowie: *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, ibidem.

12) Man vergl. z.B. B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, 1. Teil (2. Aufl. Berlin 1937), p. 235 ff.

13) F. Behrend, *Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen*, Compos. Math. 7 (1939).

14) W. Habicht, *Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme*, Comment. Math. Helvet. 18 (1946); sowie: *Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome*, ibidem.

15) A. Tarski, *A decision method for elementary Algebra and Geometry* (2. edition, University of California Press, (Berkeley and Los Angeles 1951); bes. pp. 62–63.

eine grosse Klasse "algebraischer" Sätze, die ich hier nicht definiere, die aber jedenfalls unsere oben besprochenen Sätze enthält, gilt nämlich, wie Tarski gezeigt hat, Folgendes: "Wenn ein solcher Satz in bezug auf *einen* reell-abgeschlossenen Körper beweisbar ist, so ist er in bezug auf *jeden* reell-abgeschlossenen Körper gültig." — Infolgedessen gilt also z.B. unser Satz aus Nr. 4 tatsächlich für jeden reell-abgeschlossenen Körper, und der Beweis hierfür hat zwei Teile: erstens unseren alten topologischen Beweis in bezug auf den Körper der reellen Zahlen, zweitens die Anwendung des Prinzips von Tarski.

Auf Grund dieses Prinzips ist in gewissem Sinne mein oben formulierter Vorschlag und sind in gewissem Sinne auch die erwähnten Arbeiten von Behrend und Habicht überflüssig geworden. Trotzdem wird man diese und ähnliche Arbeiten auch heute nicht als inhaltslos ansehen können: sie zeigen topologisch entdeckte Sätze in neuer algebraischer Beleuchtung; und ich glaube auch nicht, dass das Herz eines Algebraikers beruhigt wird durch den topologisch-metamathematischen Beweis des Satzes über die kommutativen Divisions-Algebren, von dem wir soeben gesprochen haben. Man müsste wohl, wenn man versuchen will, hier Klarheit zu schaffen, die Frage "was ist ein algebraischer Beweis?" systematisch diskutieren; aber das überschreitet natürlich bei weitem mein Programm.

Hopf erwähnt in seinem Vortrag eine Anzahl offener Probleme; die meisten davon sind auch heute noch nicht gelöst. Eine Ausnahme bilden lediglich die im 3. Abschnitt erwähnten Fragen über die Existenz von linear unabhängigen Richtungsfeldern auf Sphären, bzw. über die Existenz von reellen Divisionsalgebren. Hier erfolgten bahnbrechende Fortschritte durch M. Kervaire und J. Milnor (beide 1958) und wenig später durch J.F. Adams (1960). Nach diesen Resultaten ist heute bekannt, dass die Sphäre S^{n-1} einzig für $n = 2, 4, 8$ ein System von $n-1$ stetigen linear unabängigen Tangentenfeldern zulässt. Konsequenterweise kann es nur in den Dimensionen $1, 2, 4, 8$ relle Divisionsalgebren geben. Für diesen Satz über die Divisionsalgebren scheint es bis heute keinen Beweis zu geben, der die starken topologischen Hilfsmittel (u.a. den Periodizitätssatz von R. Bott) vermeidet. Auch für den von Hopf im 4. Abschnitt erwähnten Satz über kommutative reelle Divisionsalgebren scheint bis heute kein rein algebraischer Beweis bekannt zu sein.

Für diese Zusammenhänge und für die weitere Entwicklung der hier angesprochenen Themen verweisen wir auf das Buch

Ebbinghaus et al.: *Zahlen*. Springer Verlag, 3. Auflage 1992,

insbesondere auf die Kapitel 8, 9, 10 (M. Koecher, R. Remmert) und Kapitel 11 (F. Hirzebruch), und ferner auf den Beitrag

Beno Eckmann: *Continuous solutions of linear equations — An old problem, its history, and its solution*. Expo. Math. 9 (1991) 351–365.