Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **51 (1996)**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math. *51* (1996)

0013-6018/96/020078-07$1.50 + 0.20/0
© 1996 Birkhäuser Verlag, Basel

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1996 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1108: Für natürliches $k \geq 2$ bestimme man die Anzahl der n-stelligen 0-1-Sequenzen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit der Eigenschaft

$$x_{mk} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{mk-1} = x_{mk+1} = 1 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1109: Es sei k der Umkreis des Dreiecks ABC. Man bestimme alle Punktetripel (U, V, W) auf k, so dass gilt:

$$AV = AW \qquad BW = BU \qquad CU = CV\,.$$

Werner Raffke, Vechta, D

Aufgabe 1110 (Die einfache dritte Aufgabe): Meine Schülerinnen und Schüler verwechseln manchmal die erste Ableitung f' mit der Inversen $f^{[-1]}$ einer Funktion f. Für welche Funktionen spielt das keine Rolle?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Lösungen zu den Aufgaben aus Heft 2, 1995

Aufgabe 1096. Im Buch von Jury Wipper "Sechsundvierzig Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes" (Berlin 1911) wird an zweitletzter Stelle ein (unvollständiger) Beweis von Mr. de Fischbach angeführt. Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, dass die Funktion, welche einem rechtwinkligen Dreieck (mit Katheten a, b und Hypotenuse c) den Wert $a^2 + b^2 - c^2$ zuordnet, konstant ist. Dabei genügt es offenbar, Dreiecke mit fester Hypotenuse zu betrachten. Wie kann so ein strenger Beweis geführt werden?

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind vier Lösungen eingetroffen: Gyula Darvasi (Nyiregyháza, H), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), J. Schaer (Calgary, Canada), François Sigrist (Neuchâtel, CH). Alle Lösungen gehen davon aus, dass der Satz von Pythagoras im Sonderfall des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieckes sehr leicht einsehbar ist.

Gyula Darvasi und *Klaus-Dieter Drews* leiten mit einem Flächen-Zerlegungsbeweis den allgemeinen Fall her: Das Seitenquadrat $CBFG$ (Fig. 1) der Seitenlänge a werde ver-

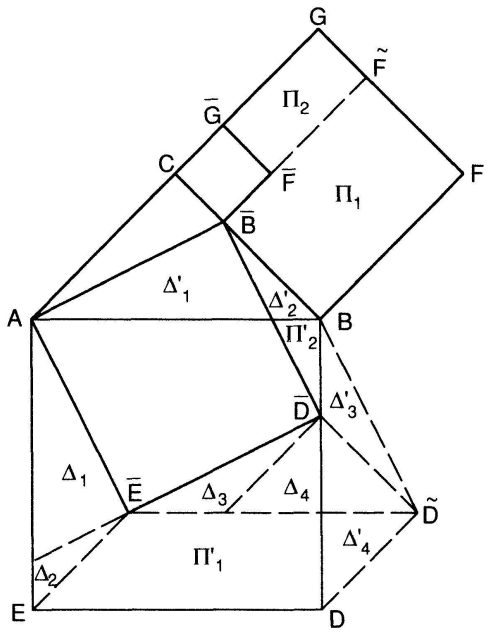

Fig. 1

kleinert zu $C\bar{B}\bar{F}\bar{G}$ der Seitenlänge $\bar{a}$, ebenso das Quadrat $ABDE$ der Seitenlänge c zu $A\bar{B}\bar{D}\bar{E}$ der Seitenlänge $\bar{c}$. Das in der Figur 1 bezeichnete Parallelogramm $\Pi_1'(= E\bar{E}\tilde{D}D)$ hat die Grundseite $E\bar{E}$ der Länge $a-\bar{a}$ und die zugehörige Höhenlänge a; das sind dieselben Masse wie beim Rechteck $\Pi_1(= B\bar{B}\tilde{F}F)$. Das Parallelogramm $\Pi_2'(= B\bar{B}\bar{D}\tilde{D})$ hat die Grundseite $B\bar{B}$ der Länge $a-\bar{a}$ sowie die Höhenlänge $\bar{a}$, dieselben Masse wie beim Rechteck $\Pi_2(= G\bar{G}\bar{F}\tilde{F})$. Ausserdem sind die Dreiecke Δ_i und Δ_i' kongruent ($i \in \{1,2,3,4\}$). Somit folgt für die Flächeninhalte:

$$\begin{aligned}\bar{c}^2 &= c^2 - |\Delta_1| - |\Delta_2| - |\Delta_3| - |\Delta_4| - (|\Pi_1'| - |\Delta_4'|) - (|\Pi_2'| - |\Delta_2'| - |\Delta_3'|) + |\Delta_1'| \\ &= c^2 - (|\Pi_1'| + |\Pi_2'|) = c^2 - (|\Pi_1| + |\Pi_2|),\end{aligned}$$

d.h., die Flächen, um die die Quadrate $CBFG$ und $ABDE$ verkleinert werden, sind einander gleich.

J. Schaer und *François Sigrist* zeigen die Invarianz der Quadratsumme a^2+b^2, womit der Sonderfall verallgemeinert werden kann. *J. Schaer* arbeitet mit Ähnlichkeit: Die beiden Dreiecke ABC und $A'BC'$ (Fig. 2) seien rechtwinklig mit gleicher Hypotenuse c. M ist der Mittelpunkt von AA', MN ist parallel zu AC und $A'O$ parallel zu CB. Dann ist $\overline{BN} = \frac{1}{2}(a'+a)$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}(b+b')$, $\overline{A'O} = (a'-a)$ und $\overline{AO} = (b-b')$. Wegen

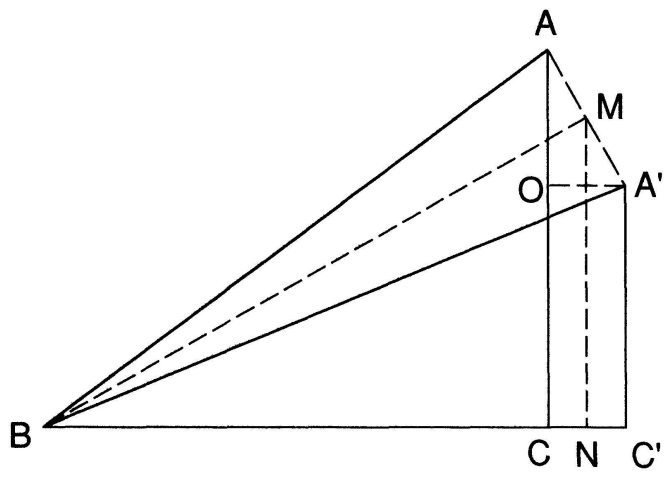

Fig. 2

$\overline{AB} = \overline{A'B} = c$ steht AA' senkrecht auf BM und daher sind die Dreiecke BNM und AOA' ähnlich. Also ist

$$\frac{b+b'}{a'+a} = \frac{a'-a}{b-b'}$$

Daraus folgt $b^2 - b'^2 = a'^2 - a^2$, also $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.

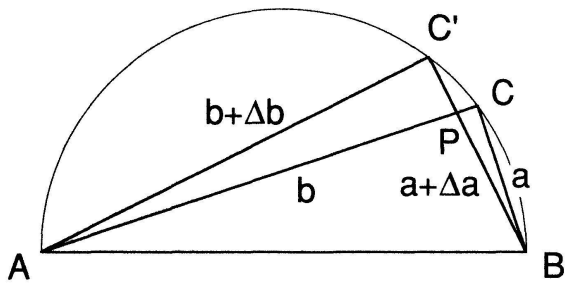

Fig. 3

François Sigrist verwendet Methoden der Infinitesimalrechnung, welche zur Zeit von Mr. de Fischbach (1723) bereits bekannt waren: Aus den infinitesimalen Beziehungen $\overline{PC} \approx -\Delta b$ und $\overline{PC'} \approx \Delta a$ (Fig. 3) folgt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $AC'P$ und BCP

$$\frac{b+\Delta b}{a} = \frac{\Delta a}{-\Delta b}$$

und daraus unter Vernachlässigung von Δb^2

$$a\Delta a + b\Delta b = 0.$$

Das heisst aber, dass beim Übergang von C zu C' die Funktion $a^2 + b^2$ konstant ist.

Aufgabe 1097: Eine unsymmetrische Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint. Die Anzahl von Würfen "Zahl", die bei einer solchen Serie geworfen werden, nennen wir die Länge der Serie. Wir nehmen an, dass p $(0 < p < 1)$ die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wurf "Zahl" ist. Nun werden jeweils n $(n \in \mathbb{N})$ Serien gespielt und die Länge der längsten Serie beobachtet. Mit $E(n)$ bezeichnen wir den Erwartungswert der Länge der längsten Serie unter n Serien. Man zeige, dass für n gegen unendlich die folgende asymptotische Formel gilt

$$E(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \{(1-p^{m+1})^n - (1-p^m)^n\} m \quad \sim \quad \frac{\log n}{\log(1/p)} .$$

Pieter Moree, Leiden, NL

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind sechs Lösungen eingetroffen: Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH). Alle Löser — bis auf einen einzigen — setzen die Intergralrechnung ein, um mit unterschiedlicher Strenge die asymptotische Formel abzuschätzen. *Michael Vowe* ist es dagegen gelungen, mit einem ganz einfachen Argument das behauptete asymptotische Verhalten plausibel zu machen. Wir geben hier zuerst seine Lösung wieder.

Die Aufgabenstellung lässt sich in eine gleichwertige umformulieren:

Es werden n Münzen auf einmal geworfen. Alle Münzen, die Kopf zeigen, werden ausgeschieden. Die übrigen Münzen werden wieder geworfen, usw., bis alle Münzen ausgeschieden sind. Wie viele Würfe sind zu erwarten?

Für die asymptotische Formel kann man in dieser vereinfachten Aufgabenstellung folgendermassen argumentieren:

Beim ersten Wurf zeigen (für grosse n) etwa $n \cdot p$ der n geworfenen Münzen "Zahl", die anderen "Kopf". Beim zweiten Wurf überleben entsprechend noch $n \cdot p^2$ Münzen, die "Zahl" zeigen. Nach k Würfen soll also $n \cdot p^k < 1$ gelten. Wegen

$$n \cdot p^k < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k > \frac{\log n}{\log(1/p)}$$

bleibt nach etwa

$$\frac{\log n}{\log(1/p)}$$

Würfen noch eine Münze übrig. Für ihre Elimination braucht man im Mittel $1/(1-p)$ Würfe. Also ist der gesuchte Erwartungswert etwa

$$\frac{1}{1-p} + \frac{\log n}{\log(1/p)} ,$$

was das verlangte asymptotische Verhalten ergibt.

Wer es ein bisschen genauer wissen will, kann *Paul Streckeisen* auf seinem analytischen Weg folgen, der fast identisch ist mit jenem von *François Sigrist*:

Setzt man $f(x) = (1 - p^x)^n$, so ist

$$E(n) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \big(f(m+1) - f(m)\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\int_m^{m+1} m \cdot f'(x)dx\Big) = \int_0^{\infty} \lfloor x \rfloor \cdot f'(x)dx \ ,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von x ist. Weiter gilt wegen $f'(x) > 0$ $(x > 0)$ und wegen $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$:

$$\int_0^{\infty} (x-1) \cdot f'(x)dx < E(n) < \int_0^{\infty} x \cdot f'(x)dx \ .$$

Es seien $I(n)$ und $J(n)$ die beiden auftretenden Integrale. Es gilt $J(n) - I(n) = 1$, woraus folgt:

$$I(n) < E(n) < I(n) + 1 \ . \tag{1}$$

Mit partieller Integration erhält man:

$$I(n) = \int_0^{\infty} (x-1) \cdot f'(x)dx = \big[(x-1)(f(x)-1)\big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (f(x)-1)dx \ .$$

Weil $(x-1) \cdot (f(x)-1) \to 0$ für $x \to \infty$, bleibt für $I(n)$:

$$I(n) = -1 + \int_0^{\infty} (1 - f(x))dx = -1 + \int_0^{\infty} (1 - (1-p^x)^n)dx \ .$$

Das letzte Integral kann mit Hilfe der Substitution $1 - p^x = t$ berechnet werden:

$$I(n) = -1 - \int_0^1 \frac{(1-t^n)}{(1-t)\ln p} dt = -1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \int_0^1 (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})dt$$

$$= -1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

(Dabei bedeutet ln() den Logarithmus mit der Eulerschen Zahl e als Basis.) Mit Hinblick auf (1) erhält man

$$-1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < E(n) < \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

Aufgrund der Abschätzung $\ln n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln n + 1$ folgt:

$$-1 + \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \cdot \ln n < E(n) < \frac{1}{\ln \frac{1}{p}} \cdot (\ln n + 1)$$

oder

$$\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{p}} \Big(1 - \frac{\ln \frac{1}{p}}{\ln n}\Big) < E(n) < \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{p}} \Big(1 + \frac{1}{\ln n}\Big) \ .$$

Die Brüche in den Klammern streben für wachsendes n gegen Null, woraus die Behauptung folgt.

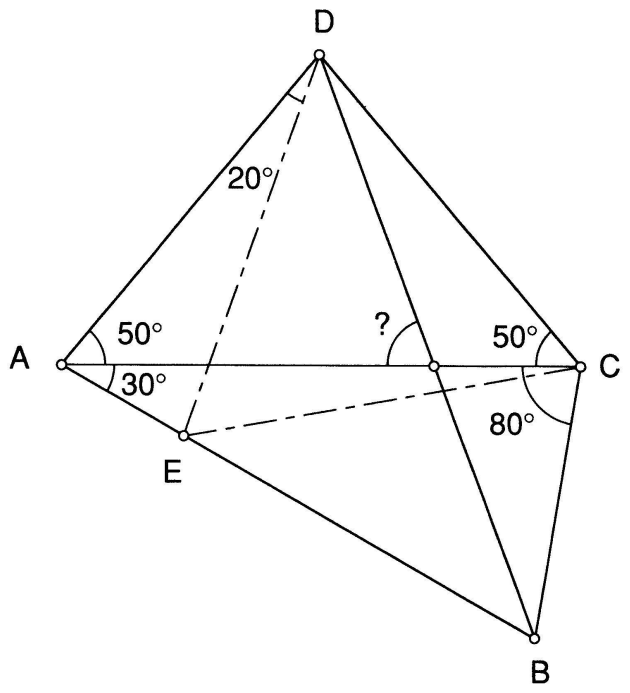

Fig. 4

Aufgabe 1098 (Die einfache dritte Aufgabe). Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen des Viereckes $ABCD$, wenn $\angle DCA = \angle CAD = 50°$, $\angle BAC = 30°$ und $\angle ACB = 80°$?

Hans Egli, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 21 Zuschriften eingetroffen: Šefket Arslanagić (Berlin, D) (4 Lösungen), G. Bercea (München, D) (5 Lösungen und eine Verallgemeinerung), Henri Carnal (Bern, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Isao Naoi (Gifu, Japan), Ivan Paasche (Stockdorf, D), Bernhard Ruh (Solothurn, CH), J. Schaer (Calgary, Canada), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Vinzenz Stadler (Honau, CH) (2 Lösungen), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH). Etwa die Hälfte der Löser arbeiten mit Trigonometrie, meistens unter Verwendung des Sinussatzes. Die geometrischen Lösungen benutzen fast alle ein gleichseitiges Dreieck, wie zum Beispiel die Lösung von *Isao Naoi*: Wir wählen E auf AB so, dass $\angle ADE = 20°$ (Fig. 4). Dann ist $\angle EDC = 60°$ und $\angle DEA = 80° = \angle DAE$. Somit ist $\overline{DE} = \overline{DA} = \overline{DC}$, und das Dreieck DEC ist gleichseitig. Nun ist aber $\angle EBC = 70° = \angle ECB$ und daher $\overline{EB} = \overline{EC}$. Damit ist $\overline{EB} = \overline{ED}$, und wegen $\angle BED = 100°$ folgt $\angle EDB = 40°$. Damit erhalten wir für den gesuchten Schnittwinkel $180° - (\angle CAD + \angle ADB) = 180° - (50° + 60°) = 70°$.

Der Hilfspunkt E ist, wie *Georg Unger* bemerkt, Ecke eines gleichseitigen neunteiligen Polygonzuges, der sich in die Ausgangsfigur (mit verlängerten Seiten) einpassen lässt (Fig. 5). *Wolfgang Moldenhauer* weist darauf hin, dass sich die Ausgangsfigur in die Diagonalenstruktur des regulären 18-Ecks einfügen lässt (Fig. 6); dies wird durch die

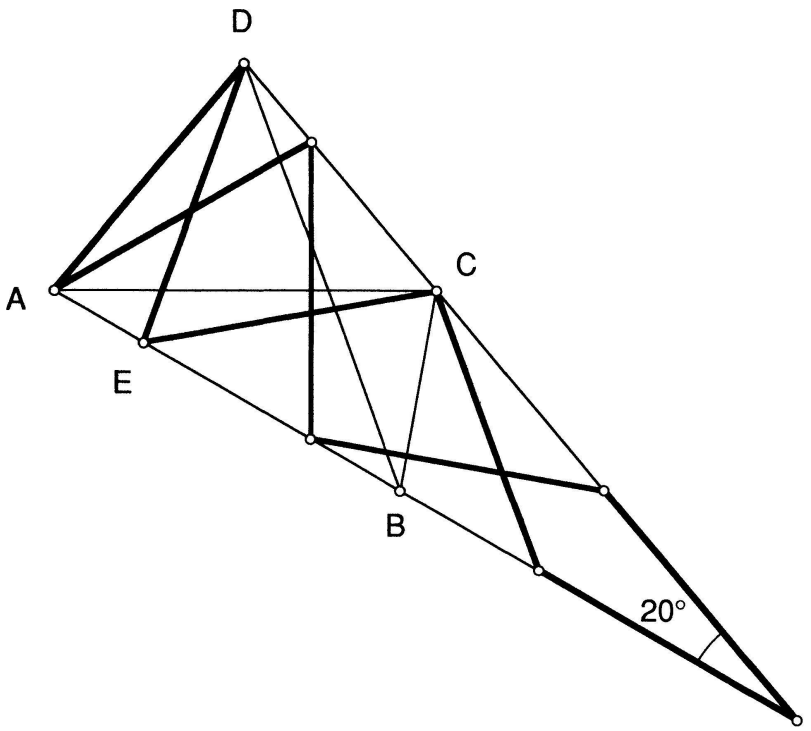

Fig. 5

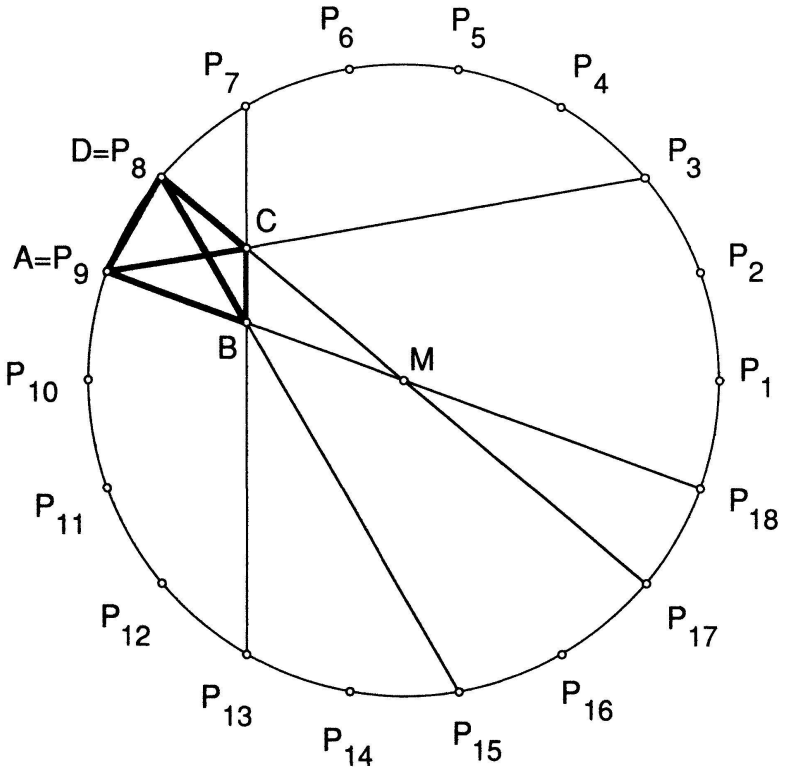

Fig. 6

nichttriviale Kopunktualität der drei Diagonalen P_7P_{13}, P_8P_{15} und P_9P_{18} sowie die aus Symmetriegründen einsehbare Kopunktualität der drei Diagonalen P_7P_{13}, P_8P_{17} und P_9P_3 ermöglicht. Damit lässt sich der gesuchte Schnittwinkel sehr einfach berechnen.