Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 51 (1996)

Rubrik: Bücher und Computersoftware

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *51* (1996)

0013-6018/96/020131-02$1.50 + 0.20/0
© 1996 Birkhäuser Verlag, Basel

Bücher und Computersoftware

J. Stillwell: Classical Topology and Combinatorial Group Theory. 2. Auflage, 334 Seiten, DM 88.-. Springer 1993; ISBN 3-540-97970-0.

A. N. Parshin und I. R. Shafarevich (Herausgeber): Algebra VII; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 58. 240 Seiten, SFr 141.-. Springer 1993; ISBN 3-540-54700-2.

Das gemeinsame Thema der beiden Bücher ist die *kombinatorische Gruppentheorie*; diese Theorie versucht Lösungen auf Fragen zu geben, welche durch die algebraische Topologie aufgeworfen werden.

1. Der Begründer der algebraischen Topologie ist Henri Poincaré. In der Analyse seiner Arbeiten, welche er 1901 verfasste, schreibt er:

> Une méthode qui nous ferait connaître les relations qualitatives dans l'espace à plus de trois dimensions pourrait, dans une certaine mesure, rendre des services analogues à ceux que rendent les figures. Cette méthode ne peut être que l'*Analysis situs* à plus de trois dimensions. Malgré tout, cette branche de la science a été jusqu'ici peu cultivée. Après Riemann est venu Betti qui a introduit quelques notions fondamentales; mais Betti n'a été suivi par personne. Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'*Analyse situs*.

Ein Beispiel soll andeuten, was man sich unter der Poincaréschen Methode vorzustellen hat:

Gegeben seien zwei topologische Räume X_1, X_2, von denen man vermutet, sie seien nicht homöomorph. Man konstruiert nun Zahlen, oder noch besser algebraische Objekte, welche durch die Räume X_1 und X_2 eindeutig bestimmt sind, und versucht nachzuweisen, dass die Zahlen für X_1 und X_2 verschieden, beziehungsweise die algebraischen Objekte für X_1 und X_2 nicht isomorph sind.

Zahlen bekommt man, wenn man die Anzahl der bogenweise zusammenhängenden Teile von X_1 und X_2 zählt, algebraische Objekte liefern die Fundamentalgruppen von X_1 und X_2.

Die *Fundamentalgruppe* eines topologischen Raumes X gewinnt man so: Man wählt einen Hilfspunkt x_0 in X und betrachtet stetige Wege, die in x_0 anfangen und dort aufhören. Sind w_1, w_2 solche Wege, kann man sie hintereinander durchlaufen und erhält einen Weg $w_1 \cdot w_2$. Man bekommt auf diese Weise eine Verknüpfung auf der Menge $\mathcal{W}$ der Wege; die Menge $\mathcal{W}$ ist allerdings noch riesengross und für das Programm von Poincaré völlig unbrauchbar. Dies ändert sich, wenn man von den Wegen zu Klassen ineinander stetig deformierbarer Wege übergeht. Diese Klassen, versehen mit der Verknüpfung, welche von der Zusammensetzung von Wegen herrührt, bilden die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ des Raumes im Punkte x_0.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist nur hilfreich, wenn man über sie genauere Angaben machen kann, wenn man etwa die Anzahl ihrer Elemente kennt. Ein erster Schritt auf dieses Ziel hin ist die Angabe einer Menge $\mathcal{X}$, welche die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ erzeugt, und einer Menge $\mathcal{R}$ von sogenannten definierenden Relationen.

Dieser erste Schritt gelingt zum Beispiel stets, wenn k ein geschlossener Streckenzug in $\mathbb{R}^3$ und X das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus k$ ist. Wenn der Raum X die Vereinigung von zwei offenen, sich überlappenden Teilräumen X_1, X_2 ist, deren Durchschnitt $X_1 \cap X_2$ bogenweise zusammenhängt, und man über die Fundamentalgruppen der Teilräume gut Bescheid weiss, kann man den ersten Schritt dank eines Satzes von H. Seifert und von E. R. van Kampen durchführen.

2. Die kombinatorische Gruppentheorie versucht, Eigenschaften von Gruppen herauszufinden, welche durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben sind.

Eine erste Frage wirft der Begriff der Relation auf. Dazu führt man *freie Gruppen* ein; sie präzisieren die Idee einer Gruppe ohne Relationen. Die Eigenschaften der freien Gruppen, ihrer Untergruppen und ihrer Auto-

morphismengruppen sind ein erstes, zentrales Thema der kombinatorischen Gruppentheorie. Die Beschreibung einer Gruppe G durch Erzeugende und Relationen läuft nun hinaus auf die Angabe einer freien Gruppe F, eines surjektiven Homomorphismus $\varphi : F \to G$ und einer Teilmenge $\mathcal{R}$ von F, für welche der kleinste Normalteiler von F, welcher $\mathcal{R}$, umfasst, gerade der Kern von φ ist.

Ein zweites Thema der Theorie bildet die Untersuchung zweier Konstruktionen, genannt *verallgemeinertes freies Produkt und HNN-Erweiterung*. Diese Konstruktionen sind algebraische Lösungen der Aufgabe, die Fundamentalgruppe eines Raumes X zu bestimmen, welcher Vereinigung von sich überlappenden, bogenweise zusammenhängenden offenen Unterräumen X_1 und X_2 ist.

Algorithmische Fragen machen einen dritten Teil der Theorie aus; eine dieser Fragen ist das *Wortproblem*: Gegeben ist eine freie Gruppe mit einem endlichen, freien Erzeugendensystem $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und eine endliche Menge $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ von Elementen aus F; sei R der kleinste Normalteiler von F, der $\mathcal{R}$ enthält.

Jedes Element von F hat eine Beschreibung als *Wort* in $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$, d.h. als endliche Folge von Symbolen $x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}$. Gesucht ist ein Rechenverfahren, das für jedes Element f von F herausfindet, ob es in R liegt.

3. Das Buch von Stillwell ist eine Einführung in die algebraische Topologie. Die betrachteten Räume X sind in der Hauptsache Graphen, Flächen oder 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten, also Räume, die sich aus Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern aufbauen lassen. Aus dem Bauplan ergibt sich dann leicht eine Beschreibung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$. Das Buch behandelt vorwiegend geometrische Fragen, wie die Klassifikation der kompakten Flächen oder die Konstruktion von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten. Ferner enthält es ein Kapitel über die erste Homologiegruppe $H_1(X; \mathbb{Z})$ und den Struktursatz für endlich erzeugbare kommutative Gruppen, sowie ein Kapitel über algorithmische Probleme. Bei den geometrischen Überlegungen arbeitet der Autor vorzugsweise mit kombinatorischen Methoden und einer starken Dosis geometrischer Anschauung. Die Kehrseite dieser Ausrichtung ist, dass es der Autor unterlässt, Begriffe wie Riemannsche Flächen, verzweigte Überlagerungen oder unverzweigte Überlagerungen zu definieren. Ebenso habe ich in verschiedenen Beweisen Behauptungen angetroffen, welche der Autor als evident hinstellt, deren Begründung einem Anfänger aber grosse Mühe machen dürften, (siehe etwa 5.2.2, 6.2.5 oder 7.1.2.). Insgesamt eignet sich das Buch daher eher zur Ergänzung einer Vorlesung als zum Selbststudium; für letzteres scheinen mir [4] und [5] brauchbarer.

4. Der siebte Band über Algebra der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften zerfällt in zwei Teile, die beide Gruppen und Geometrie zum Thema haben. Der erste Teil, verfasst von D. J. Collins und H. Zieschang, behandelt kombinatorische Gruppentheorie und Fundamentalgruppen. Algebra und Geometrie haben etwa gleiches Gewicht; da es sich um einen Bericht für Spezialisten handelt, sind die Beweise skizzenhaft oder sie fehlen ganz. Die Autoren des zweiten Teils sind R. I. Grigorchuck und P. F. Kurchanov. Sie schreiben über drei spezielle Fragen der Gruppentheorie, mit denen sich vor allem russische Mathematiker beschäftigt haben.

[1] D. E. Cohen: *Combinatorial Group Theory: a Topological Approach.* London Math. Soc. Student Texts 14; Cambridge University Press 1989.

[2] R. C. Lyndon und P. E. Schupp: *Combinatorial Group Theory.* Ergebnisse Band 89; Springer 1977.

[3] W. Magnus, A. Karrass und D. Solitar: *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations.* John Wiley & Sons 1966.

[4] W. S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction.* Graduate Texts in Mathematics, volume 56, Springer 1967.

[5] H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie.* Nachdruck durch Chelsea Publishing Company; englische Übersetzung: *A Textbook of Topology.* Academic Press 1980.

[6] J.-P. Serre: *Arbres, amalgames, SL_2.* Astérisque 46. Société Math. de France 1977; englische Übersetzung: *Trees.* Springer 1980.

R. Strebel, Fribourg

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*