Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **51 (1996)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

El. Math. *51* (1996)

0013-6018/96/0401176-05$1.50 + 0.20/0
© 1996 Birkhäuser Verlag, Basel

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1997 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
  oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1114: Parkettartige Zerlegungen der projektiven Ebene.

Zeichnet man in der projektiven Ebene vier Geraden in allgemeiner Lage, so entsteht ein vollständiges Vierseit. Dadurch wird die projektive Ebene in vier Dreiecke und drei Vierecke zerlegt, wobei jedes Dreieck an seinen Kanten ausschliesslich durch Vierecke und ebenso jedes Viereck an seinen Kanten nur durch Dreiecke begrenzt wird. Dieses hohe Mass an Symmetrie gibt Anlass zur folgenden Definition:

Eine Zerlegung der projektiven Ebene durch n Geraden in genau zwei Arten von Vielecken, von denen jedes der einen Art an seinen Kanten nur von Vielecken der anderen Art begrenzt wird, nennt man parkettartig.

Wie viele parkettartige Zerlegungen der projektiven Ebene gibt es? Welche sind es?

Frank Rothe, Salzburg, A

Aufgabe 1115: Es seien a, b, c und d vier Punkte der komplexen Zahlenebene. In Verallgemeinerung der harmonischen Lage von vier Punkten auf einer Geraden definieren wir hier die harmonische Lage von a, b, c und d durch

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d} = k_1 \ .$$

Das bedeutet, dass die Punkte c resp. d die Strecke ab äusserlich resp. innerlich im gleichen (komplexen) Verhältnis k_1 teilen. Dann folgt aber auch, dass die Punkte a resp. b die Strecke cd innerlich resp. äusserlich in einem gleichen (komplexen) Verhältnis k_2 teilen:

$$\frac{c-b}{d-b} = -\frac{c-a}{d-a} = k_2 \ .$$

Wie erkennt man geometrisch, ob sich vier Punkte der komplexen Zahlenebene in harmonischer Lage befinden? Welche möglichen Lagen können diese Punkte einnehmen, wenn man ausserdem $k_1 = k_2$ verlangt?

Rolf Rose, Magglingen, CH

Aufgabe 1116 (Die einfache dritte Aufgabe): Ist es möglich, ein gegebenes Quadrat in 1997 kleinere Quadrate aufzuteilen?

Šefket Arslanagić, Berlin, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 1995

Aufgabe 1102. Charakterisierung von orthogonalen Projektoren.

Vorbemerkung: Es bezeichne M eine $m \times n$ – Matrix und M^T ihre Transponierte. Man nennt M^+ die *Moore-Penrose-Inverse* von M. Sie erlaubt auch für nicht-quadratische Matrizen die Bildung einer verallgemeinerten Inversen und ist zum Beispiel beim Lösen linearer $m \times n$ – Gleichungssysteme sehr nützlich. Sie wurde um 1920 von E. H. Moore entdeckt und 1955 von R. Penrose durch die folgenden vier Bedingungen eindeutig festgelegt:

$$MM^+M = M \tag{1}$$
$$M^+MM^+ = M^+ \tag{2}$$
$$(MM^+)^T = MM^+ \tag{3}$$
$$(M^+M)^T = M^+M \tag{4}$$

Es sei nun A eine quadratische Matrix mit reellen Einträgen. Man nennt A einen orthogonalen Projektor, wenn A symmetrisch und idempotent ist, d. h. wenn A die Eigenschaften $A^T = A$ und $A^2 = A$ erfüllt. Man zeige, dass A genau dann ein orthogonaler Projektor ist, wenn $A^+ = A^TA$ gilt.

G. Trenkler und S. O. Troschke, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen.

Es sind 6 Lösungen eingetroffen: Harald Fripertinger (Graz, A), F. Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Paul Streckeisen (Zürich, CH). Alle Autoren beweisen die behauptete Äquivalenz im Prinzip gleich. Wir setzen den hier publizierten Beweis aus drei Arbeiten zusammen. Der erste Teil stammt von *Joachim Klose*, der zweite von *Paul Streckeisen* und *H.-J. Seiffert* und die Anmerkung und Literaturangabe von *Dieter Koller*.

Beweis

1. $A^T = A$ und $A^2 = A \quad \Longrightarrow \quad A^+ = A^TA$.

Es sei A ein orthogonaler Projektor, d. h. $A^T = A$ und $A^2 = A$. Dann ist – wie man durch vollständige Induktion erkennt – allgemein $A^k = A$ für jede natürliche Zahl k. Setzt man nun die Matrix A^TA anstelle von M^+ und A anstelle von M in die linken Seiten von (1) bis (4) ein, so ergibt sich:

$$A \cdot A^TA \cdot A = A^4 = A \tag{1'}$$
$$A^TA \cdot A \cdot A^TA = A^5 = A^2 = A^TA \tag{2'}$$
$$(A \cdot A^TA)^T = (A^3)^T = A^T = A = A^3 = A \cdot A^TA \tag{3'}$$
$$(A^TA \cdot A)^T = (A^3)^T = A^T = A = A^3 = A^TA \cdot A \tag{4'}$$

Die vier Gleichungen (1′) bis (4′) besagen aber gerade, dass A^TA die Moore-Penrose-Inverse von A ist. Also gilt $A^TA = A^+$.

2. $A^+ = A^T A \quad \Longrightarrow \quad A^T = A$ und $A^2 = A$.

Nun erfüllt $A^T A$ also die Bedingungen (1) bis (4). Aus (1) und (3) folgen:

$$AA^T AA = A \tag{1''}$$
$$(AA^T A)^T = AA^T A \tag{3''}$$

Unter der Verwendung der Regel

$$(MN)^T = N^T M^T \tag{$*$}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} A &\overset{(1'')}{=} AA^T AA \overset{(3''}{=} (AA^T A)^T A \overset{(*)}{=} A^T AA^T A \\ &\overset{(3'')}{=} A^T (AA^T A)^T \overset{(*)}{=} A^T A^T AA^T \overset{(*)}{=} (AA^T AA)^T \overset{(1'')}{=} A^T \ . \end{aligned}$$

A ist also symmetrisch und kann daher in der Form

$$A = U\ D\ U^T$$

dargestellt werden, wobei U eine orthogonale Matrix und D eine Diagonalmatrix ist. Wegen $A^T = A$ folgt aus (1") $A^4 = A$ und damit $(U\ D\ U^T)^4 = U\ D\ U^T$. Wegen $U^T = U^{-1}$ lässt sich dies vereinfachen zu $U\ D^4\ U = U\ D\ U^T$, woraus man $D^4 = D$ erhält. Für jedes Diagonalelement x von D gilt somit: $x^4 = x$, woraus folgt, dass für die reelle Zahl x entweder $x = 0$ oder $x = 1$ gelten muss. Somit ist $D^k = D$ für jedes natürliche k. Diese Eigenschaft gibt D an A weiter:

$$A^2 = (U\ D\ U^T)^2 = U\ D^2 U^T = U\ D\ U^T = A\ .$$

A ist also symmetrisch und idempotent. □

Anmerkung zum Begriff "Orthogonaler Projektor"

Sei F die von der Matrix A mit $A^2 = A$ und $A^T = A$ induzierte lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sei ferner $F(y) := Ay$. Dann ist $U := \mathrm{Im}(F)$ ein linearer Unterraum und man kann zeigen, dass für alle Punkte y und z das skalare Produkt von $Ay - y$ und Az null ist. Das bedeutet, dass die Abbildung F eine Normalprojektion ist.

Ist umgekehrt U ein linearer Unterraum und F die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und ist $F(x)$ der Fusspunkt des Lotes von y auf U, so ist F linear und für die zu F gehörige Matrix gilt $A^2 = A$ und $A^T = A$.

Literatur

Koecher, M.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer-Lehrbuch (1992), Kapitel 6, Paragraph 3.7.

Aufgabe 1103. Kurzfassung der Aufgabe zu gefalteten Kreisketten.

Zwei Kreise können sich aneinander- bzw. ineinanderliegend berühren. Drei Kreise, von denen der erste den zweiten und der zweite den dritten berühren soll, die aber sonst schnittpunktfrei verlaufen, können schon fünf Faltungen in der Ebene bilden. Man ermittle die Anzahl aller möglichen Faltungen einer n-gliedrigen offenen Kette in der Ebene, wobei die Radien der Ringe passend gewählt seien und die Faltungsergebnisse als gleich gelten sollen, falls sie topologisch äquivalent sind.

Werner Raffke, Vechta, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Lösungen eingetroffen: Harald Fripertinger (Graz, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Daniel Stoffer (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Roland Wyss*: Numeriert man die n Kreise in der Reihenfolge ihres Berührens mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, so folgt aus der Konstruktion einer Faltung: Ist ein Kreis i von einem Kreis j umschlossen, so sind es alle Kreise mit den Nummern $1, 2, \ldots, j-1$ falls $j > i$ und $j+1, j+2, \ldots, n$ falls $j < i$ ist. Eine bestimmte Faltung lässt sich daher durch die blosse Beschreibung der Lage des ersten und des letzten Kreises relativ zu allen anderen charakterisieren. Wir definieren die beiden 01-Folgen der Länge n

$$a_1 = 1,\ a_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Kreis 1 in Kreis } i \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2 \le i \le n)$$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{falls Kreis } n \text{ in Kreis } i \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \le i \le n-1)\,, \quad e_n = 1\,.$$

Bei der Bildung dieser beiden 01-Folgen ist eine einzige Beschränkung zu beachten: Ist j die höchste Nummer eines Kreises, welcher den Kreis mit Nummer 1 umschliesst, so liegt der Kreis mit Nummer n nicht in den Kreisen mit den Nummern $1, 2, 3, \ldots, j-1$.

Unterscheidet man die $n+1$ Fälle

$$a_i = 0 \quad (2 \le i \le n)\,, \quad e_1 = 0$$
$$a_i = 0 \quad (2 \le i \le n)\,, \quad e_1 = 1$$
$$a_j = 1,\ a_i = 0\ (j < i \le n),\ e_k = 0\ (1 \le k < j) \text{ für } j = 2, 3, \ldots, n$$

so erhält man $(n+1) \cdot 2^{n-2}$ Möglichkeiten für alle erlaubten Folgenpaare (a, e).

Dabei treten die nicht-symmetrischen Kreisfaltungen genau paarweise auf: Die Umkehrung der Kreisnumerierung bewirkt das Vertauschen der Folgen a und e und deren Lesen von hinten nach vorn. Die symmetrischen Faltungen erscheinen je einfach: Sie werden durch palindromische Folgenpaare (a, e) repräsentiert, das heisst e rückwärts gelesen ergibt a. Wegen der obgenannten Beschränkung bestehen sie je zur Hälfte aus Nullen, so dass deren Anzahl $2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ beträgt. Addiert man diese Zahl zur gefundenen Anzahl Möglichkeiten, hat man also alle möglichen Faltungen doppelt gezählt.

Die Anzahl aller möglichen Faltungen einer n-gliedrigen offenen Kreiskette in der Ebene errechnet sich also nach der Formel

$$\frac{1}{2}\left((n+1) \cdot 2^{n-2} + 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\right) = (n+1) \cdot 2^{n-3} + 2^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor}.$$

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ergeben sich die Anzahlen $1, 2, 5, 11, 26, 58, 132, 292, \ldots$.

Aufgabe 1104 (Kurzfassung der einfachen dritten Aufgabe). Die Wölbung eines getrockneten Brettes, das exzentisch aus einem Stamm herausgeschnitten wurde, ergibt sich aus den unterschiedlichen Schwindungsverlusten beim Trocknen: Für Fichtenholz ist das Schwindmass in der Längsrichtung des Stamms 0.3%. Quer dazu ist das Schwindmass in radialer Richtung 3.6% und in tangentialer Richtung 7.8%. Wie gross ist der Krümmungsradius bei der Längsachse des getrockneten Brettes, ausgedrückt durch den Abstand dieser Achse von der Stammachse?

Aldo Duelli, Wuppenau, CH

Da keine Lösung eingegangen ist, geben wir die Lösung des Aufgabenstellers wieder: Es sei r der Abstand der Längsachse des frischen Brettes von der Stammachse, db ein (infinitesimal) kleiner Bogen auf dem Jahrring durch die Längsachse des frischen Brettes und $d\phi = \frac{db}{r}$ der zugehörige Zentriwinkel. Ferner seien r', db' und $d\phi'$ die entsprechenden Daten des getrockneten Brettes. Schliesslich sei β_r dass radiale Schwindmass und β_t das tangentiale Schwindmass. (Das Schwindmass in der Längsrichtung des Stammes ist für die Aufgabe irrelevant.) Dann gelten die Beziehungen $r' = (1-\beta_r)r$ und $db' = (1-\beta_t)db$, woraus $d\phi' = \frac{1-\beta_t}{1-\beta_r}\, d\phi$ folgt. Wegen $\beta_r < \beta_t$ ist $d\phi' < d\phi$. Das bedeutet also, dass die Jahrringe des getrockneten Brettes etwas weniger gekrümmt sind als beim frischen Brett. Der Unterschied $d\epsilon := d\phi - d\phi'$ der beiden Zentriwinkel ist dafür verantwortlich, dass sich das getrocknete Brett in der Gegenrichtung der Jahrringe krümmt.

Es sei nun ρ der gesuchte Krümmungsradius. Dann gilt $db' = \rho\, d\epsilon$ und es folgt

$$\rho = \frac{db'}{d\epsilon} = \frac{(1-\beta_t)db}{d\phi - \left(\frac{1-\beta_t}{1-\beta_r}\right) d\phi} = \frac{(1-\beta_t)(1-\beta_r)\, db}{(\beta_t-\beta_r)\, d\phi} = r\,\frac{(1-\beta_t)(1-\beta_r)}{\beta_t-\beta_r}.$$

Für die numerischen Werte $\beta_r = 0.036$ und $\beta_t = 0.078$ ergibt sich $\rho \approx 21.16\, r$.