Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **52 (1997)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 87 – 90
0013-6018/97/020087-4 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1997 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
  oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1120: Wenn sich die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k \geq K} a_k x^k \quad (k,\ K \in \mathbb{N})$$

aufsummieren lässt, kann man damit auch die Potenzreihe

$$f_1(x) = \sum_{k \geq K} \frac{a_k x^k}{k+p} \quad (p \neq -k \text{ für alle } k \geq K,\ p \in \mathbb{C})$$

durch das Integral

$$f_1(x) = x^{-p} \int_0^x t^{p-1} f(t) dt$$

berechnen. Man beweise dies und leite daraus die Beziehung

$$\sum_{k \geq K} \frac{x^k}{k + \alpha(x)} = x \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(x) \cdot t}}{e^t - x} dt \quad (-1 \leq x \leq 1,\ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)$$

her.

Renate Golombek, Marburg, D

Aufgabe 1121: Für ganzzahliges $n = 0, 1, \ldots$ und reelles x mit $0 < x \neq 1$ sei

$$f_n(x) := \left(\frac{x^2 - x}{\ln x} \right)^{n+1} .$$

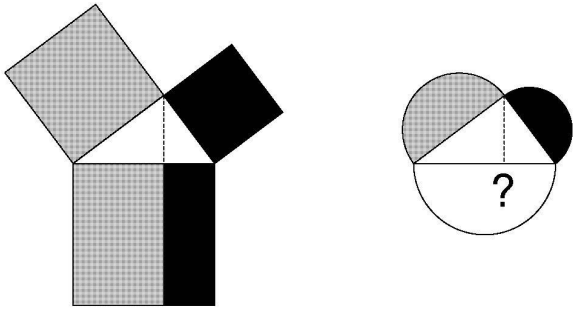
Man zeige, dass gilt

$$\lim_{x \to 1} f_n^{(n)}(x) = (n+2)^n ,$$

wobei $f_n^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung der Funktion $f_n(x)$ ist.

Friedhelm Götze, Jena, D

Aufgabe 1122 (Die einfache dritte Aufgabe):



Hans Walser, Frauenfeld, CH

Lösungen zu den Aufgaben aus Heft 2, 1996

Aufgabe 1108. Für natürliches $k \geq 2$ bestimme man die Anzahl der n-stelligen 0-1-Sequenzen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit der Eigenschaft

$$x_{mk} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{mk-1} = x_{mk+1} = 1 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es haben uns 6 Zuschriften erreicht, nämlich von Harald Fripertinger (Graz, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Ganz vollständig waren nur vier Arbeiten. Wir folgen hier der Lösung von *Hansruedi Widmer*, der mit den bescheidensten mathematischen Mitteln auskommt.

Lösung: Es bezeichne $a_{n,k}$ die gesuchte Anzahl von Folgen. Wir behandeln die beiden Fälle $k = 2$ und $k > 2$ mit unterschiedlichen Methoden. Im ersten Fall verwenden wir eine rekursive, im zweiten eine "direkte" Überlegung.

- $k = 2$

  Für $n = 1$ hat man die beiden Folgen 0 und 1, für $n = 2$ die drei Folgen 00, 10 und 11. Es gilt also $a_{1,2} = 2$ und $a_{2,2} = 3$. Wir überlegen nun, wie man von der Anzahl $a_{n,2}$ zur Anzahl $a_{n+1,2}$ gelangt.

  – Ist n ungerade, so kann man an jeder der $a_{n,2}$ Sequenzen der Länge n eine 0 anhängen. Eine 1 darf man nur jenen $a_{n-1,2}$ Folgen der Länge n, die auf 1 enden, hinzufügen. Für ungerade n gilt also $a_{n+1,2} = a_{n-1,2} + a_{n,2}$.

  – Ist n gerade, so enden von den $a_{n+1,2}$ Folgen der Länge $n+1$ deren $a_{n-1,2}$ auf 0, denn beim Weglassen dieser 0 muss ja eine auf 0 endende Folge der Länge n entstehen. Auf 1 enden $a_{n,2}$ dieser Sequenzen. Es gilt also auch für gerades n die Formel $a_{n+1,2} = a_{n-1,2} + a_{n,2}$.

In beiden Fällen gilt also die Rekursionsformel der Fibonaccifolge (f_n). Weil auch die Startwerte aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen sind, hat man (unter Berücksichtigung der Indexverschiebung) $a_{n,2} = f_{n+2}$.

- $k > 2$

  Jede Sequenz ist zusammengebaut aus Nullen und Einsen sowie aus einigen der fünf Dreierblöcke 000, 001, 100, 101 und 111, wobei die mittlere Ziffer an einer der Stellen mk $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ liegt. Wir illustrieren die Idee an einem Beispiel mit $n = 18$ und $k = 5$.

$$011\ \underbrace{101}_{\text{Block}}\ 10\ \underbrace{001}_{\text{Block}}\ 01\ \underbrace{111}_{\text{Block}}\ 00$$

  Zur Bestimmung der Anzahl der Sequenzen unterscheiden wir wiederum 2 Fälle:

  - k ist kein Teiler von n. Dann ist es unwichtig, ob die Folge auf 0 oder auf 1 endet. Die Folgen bestehen dann aus $\lfloor n/k \rfloor$ Blöcken und aus $n - 3 \cdot \lfloor n/k \rfloor$ Einzelziffern. Es gibt also $a_{n,k} = 5^{\lfloor n/k \rfloor} \cdot 2^{n-3\cdot\lfloor n/k \rfloor}$ Folgen.
  - k ist ein Teiler von n. Die letzten zwei Ziffern werden aus einem der drei "Miniblöcke" 00, 10 oder 11 gebildet. Davor stehen $n/k - 1$ Dreierblöcke und $n + 1 - 3 \cdot n/k$ Einzelziffern. Es gibt also $a_{n,k} = 3 \cdot 5^{n/k-1} \cdot 2^{n+1-3\cdot n/k}$ Folgen dieser Art.

  Man hat also für $k > 2$ in möglichst vereinheitlichter Schreibweise:

$$a_{n,k} = \begin{cases} 5 \cdot 5^{\lfloor n/k \rfloor - 1} \cdot 2^{n-3\cdot\lfloor n/k \rfloor} & \text{falls} \quad n \not\equiv 0 \pmod{k} \\ 6 \cdot 5^{\lfloor n/k \rfloor - 1} \cdot 2^{n-3\cdot\lfloor n/k \rfloor} & \text{falls} \quad n \equiv 0 \pmod{k} \end{cases}$$

Aufgabe 1109. Es sei k der Umkreis des Dreiecks ABC. Man bestimme alle Punktetripel (U, V, W) auf k, so dass gilt:

$$AV = AW, \quad BW = BU, \quad CU = CV$$

Werner Raffke, Vechta, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Tibor Dosa (Huszti, H), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Marcus Kurtz (Nürnberg, D), J. Schaer (Calgary, Canada), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Die Lösungen lassen sich in drei Typen einteilen: Ein Lösungstyp arbeitet direkt mit Geradenspiegelungen, ein zweiter Lösungstyp stellt diese Spiegelungen mithilfe komplexer Zahlen dar, und ein dritter Lösungstyp arbeitet mit Winkelüberlegungen.

Im folgenden die Spiegelungslösung: Mit M als Umkreismittelpunkt lässt sich die Bedingung der Aufgabe durch $U = \Sigma_{MC}(V)$, $V = \Sigma_{MA}(W)$ und $W = \Sigma_{MB}(U)$ formulieren.

Also ist U Fixpunkt der Abbildung $\Sigma_{MC}\ \Sigma_{MA}\ \Sigma_{MB}$. Als Zusammensetzung dreier Geradenspiegelungen mit kopunktalen Spiegelachsen kann diese Abbildung aber als eine einzige Geradenspiegelung Σ_g geschrieben werden. Für U ergeben sich somit die beiden Schnittpunkte von g mit dem Umkreis k als Lösungen. Analog ergeben sich je zwei diametrale Lösungen für V und W. *Roland Wyss* bemerkt, dass sich diese Überlegungen auf den Fall von n Punkten auf k verallgemeinern lassen, wobei – einmal mehr – die Parität von n eine entscheidende Rolle spielt: Für n ungerade gibt es zwei diametrale n-Tupel von Punkten als Lösungen, für n gerade gibt es entweder unendlich viele oder dann keine n-Tupel als Lösungen je nachdem, ob die Zusammensetzung der n Geradenspiegelungen, welche nun eine Drehung darstellt, die Identität ist oder nicht.

Mit Winkelüberlegungen lässt sich zeigen, dass das eine Lösungstripel U, V, W sich als Schnittpunkt der Dreieckshöhen mit k ergibt. Das dazu diametrale Lösungstripel entsteht auch aus den Schnittpunkten von k mit den Parallelen zu einer Seite durch die gegenüberliegende Dreiecksecke.

In der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen ist die triviale Lösung $U = V = W$ beliebig auf k. Ferner gibt es im Falle eines rechtwinkligen Dreieckes mit c als Hypotenuse die triviale Lösung mit $U = V$ beliebig auf k und W als Spiegelbild dieses Punktes bezüglich c.

Aufgabe 1110 (Die einfache dritte Aufgabe). Meine Schülerinnen und Schüler verwechseln manchmal die erste Ableitung f' mit der Inversen $f^{[-1]}$ einer Funktion f. Für welche Funktionen spielt das keine Rolle?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungen eingetroffen: Christian Blatter (Zürich, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Roland Wyss*: Der naheliegende Ansatz $f(x) = a\,x^b (x > 0)$ liefert $f'(x) = abx^{b-1}$ beziehungsweise $f^{[-1]}(x) = x^{\frac{1}{b}}\,a^{-\frac{1}{b}}$. Es folgt durch Vergleich $b^2 - b - 1 = 0$, das heisst $b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $a^{1+\frac{1}{b}} = a^b = \frac{1}{b}$, also $a = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}} = (b-1)^{b-1}$. Man erhält so die Funktionen

$$f_1(x) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

und

$$f_2(x) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} e^{-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i\pi}\, x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Diese beiden Funktionen scheinen die einzigen elementaren Lösungen der Aufgabe zu sein. Mehrere Einsender weisen darauf hin, dass eine vollständige Bearbeitung dieser Aufgabe den Rahmen einer *einfachen Aufgabe* sprengt.