Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 52 (1997)

Artikel: Coxetergruppen
Autor: Suter, Ruedi
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2657

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 12 – 22
0013-6018/97/010012-11 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Coxetergruppen

Ruedi Suter

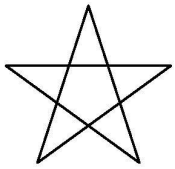
Ruedi Suter wurde 1963 in Zürich geboren. Sein Mathematikstudium an der ETH Zürich schloss er 1987 mit dem Diplom ab; seine zahlentheoretische Diplomarbeit wurde mit einer ETH-Medaille ausgezeichnet. Er war anschliessend als Assistent an der ETH tätig und promovierte 1994 mit einer Dissertation über Darstellungen von Quantengruppen. Es folgte ein einjähriger Forschungsaufenthalt am MIT. Ruedi Suters mathematische Interessen sind weitgespannt, zur Zeit richten sie sich vor allem auf die Gebiete Algebra, Zahlentheorie und mathematische Physik. Ein grosser Teil seiner Freizeit gehört dem Klavierspiel, besonders gerne spielt er Kompositionen von Beethoven, Chopin und Schubert.

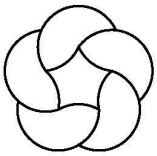
1 Einleitung

Symmetrien haben die Menschen schon immer fasziniert. In der Tat scheinen Figuren mit Symmetrie einem ästhetischen Grundbedürfnis des Menschen entgegenzukommen. Dies kann man bereits an ganz einfachen Beispielen feststellen. Jede der folgenden beiden

Schon immer haben Malerei und Architektur von der starken ästhetischen Wirkung der Symmetrie Gebrauch gemacht. Vielleicht hat gerade dies die Mathematik in besonderer Weise dazu angeregt, sich eingehend mit diesem geometrischen Phänomen zu beschäftigen. Das mathematische Hilfsmittel, das eine befriedigende und durchsichtige Beschreibung der Symmetrie ermöglicht, ist die Gruppentheorie; sie liefert zum Beispiel eine vollständige Klassifikation der ebenen Ornamente und der räumlichen Kristallstrukturen. Unter den Gruppen, die in diesem Zusammenhang auftreten, sind diejenigen, die durch Spiegelungen erzeugt werden, die wichtigsten. Denn diese sogenannten Coxetergruppen treten – wie sich im Laufe der Entwicklung gezeigt hat – nicht nur beim speziellen anschaulichen Problem in natürlicher Weise auf, sondern sie spielen auch in höheren Dimensionen und in der abstrakten Theorie der algebraischen Gruppen eine zentrale Rolle. – In seinem Beitrag gibt Ruedi Suter zuerst einen Überblick über die Theorie der Coxetergruppen und behandelt anschliessend mit elementaren Mitteln ein Problem, das die Ordnung einer solchen Gruppe betrifft. *ust*

Figuren kann um ihren Mittelpunkt um ganzzahlige Vielfache von 72° gedreht werden, ohne dass sich ihr Aussehen ändert.





Während damit beim Kranz schon alle Symmetrien ausgeschöpft sind, hat das Pentagramm als Symmetrien noch die Spiegelungen an den Symmetrieachsen. Ja, man erhält jede Symmetrie des Pentagramms, indem man Spiegelungen an den Symmetrieachsen nacheinander ausführt. Der vorliegende Artikel handelt von den Symmetrien dieses Typs, Symmetrien, welche sich durch Zusammensetzen von Spiegelungen beschreiben lassen.

Die Symmetrien, welche eine Figur aufweist, werden mathematisch durch eine Gruppe beschrieben. Diese besteht aus den Symmetrieabbildungen, also aus allen Transformationen, welche die Figur in sich überführen. Unter den Gruppen, die auf diese Art auftreten, spielen mathematisch und in Anwendungen diejenigen eine ausgezeichnete Rolle, die durch Spiegelungen erzeugt werden. Man nennt solche Gruppen heute allgemein *Coxetergruppen*; von ihnen handelt der vorliegende Beitrag. Nach einer allgemeinen Einführung in die Theorie wird am Schluss auf ein neueres spezielles Resultat eingegangen (siehe [Mc]). – Bei der Theorie der Coxetergruppen handelt es sich um ein sehr aktives Forschungsgebiet, das neuerdings vielfältige Anwendungen gefunden hat, die mit dem geometrischen Ursprung nur noch entfernt zu tun haben. Als weiterführende Literatur seien die folgenden Texte empfohlen [Bo, Br, Hi, Hu].

2 Gruppen und Gruppenpräsentierungen

Bekanntlich ist eine Gruppe eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfungsvorschrift $G \times G \to G$, welche den Axiomen der Assoziativität, der Existenz eines Neutralelementes e und der Existenz der Inversen genügt.

Gruppen lassen sich auf sehr viele verschiedene Arten beschreiben. Eine für unsere Zwecke besonders geeignete Möglichkeit bieten *Gruppenpräsentierungen*. Eine Gruppe wird dabei durch *Erzeugende und Relationen* beschrieben. Das folgende Beispiel möge als Illustration dienen. (Die Erläuterungen im allgemeinen Fall folgen anschliessend.)

Wir fixieren eine ganze Zahl n und betrachten die Gruppe G_n mit der Präsentierung

$$G_n := \left\langle s,t \;\middle|\; s^2 = stst^{-1} = tst^2 = (tst)^n = e \right\rangle .$$

In G_n gilt $ts = stst^{-1}ts = sts^2 = st$. Weiter ist $s = s^{-1}s^2 = s^{-1}tst^2 = s^{-1}stt^2 = t^3$. Damit folgt

$$G_n = \left\langle\, t \;\middle|\; t^6 = t^{5n} = e \,\right\rangle ,$$

also

$$G_n = \begin{cases} \{e\} & & \text{falls } n \equiv 1,5 \pmod 6, \\ \{e,t\} & \text{mit } t^2 = e & \text{falls } n \equiv 2,4 \pmod 6, \\ \{e,t,t^2\} & \text{mit } t^3 = e & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 6, \\ \{e,t,t^2,t^3,t^4,t^5\} & \text{mit } t^6 = e & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

Allgemein schreiben wir

$$G = \langle S \mid R \rangle \ .$$

Dabei ist S eine Menge (man denke an ein möglicherweise unendliches Alphabet). Die Elemente aus S sind Gruppenelemente, welche die Gruppe G erzeugen. Jedes Element $w \in G$ lässt sich als Produkt von Elementen aus S und ihrer Inversen schreiben:

$$w = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_n^{\varepsilon_n}, \qquad \text{wo } s_1, \ldots, s_n \in S,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$$

für eine natürliche Zahl n. Einen solchen Ausdruck für w wollen wir ein S-*Wort* nennen. Für $n = 0$ ergibt sich das leere Wort; dieses ist gerade das Neutralelement e der Gruppe G. Die Menge R ist eine Teilmenge der Menge aller S-Wörter. In der Gruppe G ist nun jedes Wort aus R gleich dem Neutralelement von G. Die Schreibweise $G = \langle S \mid R \rangle$ bedeutet genauer, dass die Gruppe G von den Elementen in S erzeugt wird und dass jede Relation $v = w$ zwischen zwei S-Wörtern eine Konsequenz der Relationen $r = e$ für $r \in R$ (und den Relationen in den Gruppenaxiomen) ist.

Es ist leicht einzusehen, dass sich jede Gruppe in Form einer Gruppenpräsentierung schreiben lässt.

Statt $G = \langle S \mid R \rangle$, wobei $S = \{s_1, \ldots, s_g\}$ und $R = \{w_1, \ldots, w_l\}$, schreiben wir auch $G = \left\langle s_1, \ldots, s_g \;\middle|\; w_1 = \ldots = w_l = e \right\rangle$, $G = \left\langle s_1, \ldots, s_g \;\middle|\; w_k = e \ \ (k = 1, \ldots, l) \right\rangle$ etc.

Vielleicht legt schon das Beispiel nahe, dass es im allgemeinen schwierig sein kann, sich aus der gegebenen Gruppenpräsentierung einen Überblick über die Gruppe zu verschaffen. Ja, es lassen sich tatsächlich negative Resultate beweisen! So zeigte vor rund vierzig Jahren P.S. Novikov, dass es eine Gruppe $G = \langle S \mid R \rangle$ mit endlichen Mengen S und R gibt, für welche kein Algorithmus existiert, der entscheidet, ob zwei S-Wörter in G übereinstimmen. Trotz dieser Tatsache sind Gruppenpräsentierungen in vieler Hinsicht ausserordentlich nützlich. Dies gilt nicht nur für theoretische Aspekte, sondern auch für rein praktische. Man denke etwa an die Computeralgebra. Hier lassen sich mit Hilfe von Präsentierungen auch gewisse unendliche Gruppen, nämlich die endlich präsentierbaren, durch eine endliche Datenmenge beschreiben. Nachdem wir nun Gruppenpräsentierungen im allgemeinen kennengelernt haben, wollen wir uns im nächsten Abschnitt einer speziellen Klasse zuwenden.

3 Coxetergruppen (Definition und einige Beispiele)

Coxeter [C1] hat als erster systematisch die Gruppen untersucht, welche durch Spiegelungen erzeugt sind. Nicht jede Gruppe gehört zur Klasse der Coxetergruppen, z.B. G_3 und G_0 im obigen Beispiel oder auch die Symmetriegruppe des Kranzes in der Einleitung sind keine Coxetergruppen. Die Klasse der Coxetergruppen ist dennoch genügend reichhaltig, um interessante Resultate zu erhalten; anderseits ist sie aber auch klein genug, dass sich sehr viele spezielle Eigenschaften beweisen lassen. Coxetergruppen treten in ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik auf, eine Tatsache, die gar nicht so erstaunlich ist, wie es auf den ersten Blick erscheint.

Definition. Eine *Coxetergruppe* ist eine Gruppe W[1] mit einer Präsentierung der Form

$$W = \left\langle S \;\middle|\; (st)^{m(s,t)} = e \text{ (für } s,t \in S \text{ mit } m(s,t) \neq \infty) \right\rangle ,$$

wobei $m(s,s) = 1$ für $s \in S$ und $m(s,t) = m(t,s) \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ für $s,t \in S$, $s \neq t$. Die Menge S (die wir stillschweigend als endlich voraussetzen wollen) heisst *ausgezeichnetes Erzeugendensystem*. Ihre Kardinalität heisst der *Rang* von W oder besser von (W,S).

Eine Coxetergruppe ist also durch die symmetrische $|S| \times |S|$-Matrix $M = \big(m(s,t)\big)_{s,t \in S}$ gegeben, deren Diagonalelemente alle gleich 1 sind und deren übrige Elemente in $\mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ liegen. Die Matrix M heisst die *Coxetermatrix* von (W,S).

Multiplizieren wir die Identität $(st)^{m(s,t)} = e$ von links und von rechts mit s, so folgt wegen $s^2 = e$, dass $(ts)^{m(s,t)} = e$ gilt. Das rechtfertigt die Beschränkung der Betrachtungen auf den Fall einer symmetrischen Matrix M.

Beispiele (erster Teil)

Eine Coxetergruppe vom Rang 0 ist trivial, besteht also nur aus dem Neutralelement.

Für den Rang 1 haben wir eine Gruppe mit 2 Elementen.

Auch die Coxetergruppen vom Rang 2 lassen sich leicht konkret beschreiben. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ setzen wir $D_n := \langle s,t \,|\, s^2 = t^2 = (st)^n = e \rangle$ und $D_\infty := \langle s,t \,|\, s^2 = t^2 = e \rangle$. Die Gruppe D_n hat $2n$ Elemente und heisst *Diedergruppe der Ordnung* $2n$. (Der Diedergruppe der Ordnung 10 sind wir in der Einleitung begegnet.) Die *unendliche Diedergruppe* D_∞ ist eine unendliche Gruppe. Sie kann aufgefasst werden als Isometriegruppe von $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Die beiden Erzeugenden s bzw. t entsprechen dann z.B. den Spiegelungen in den Punkten 0 bzw. $\frac{1}{2}$. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ lässt sich D_n als Symmetriegruppe eines regelmässigen n-Ecks realisieren. Die beiden Erzeugenden s bzw. t entsprechen den Spiegelungen an zwei Symmetrieachsen, welche einen Winkel von $\frac{1}{2n} \cdot 360^\circ$ einschliessen. Die Gruppe D_2 heisst auch Kleinsche Vierergruppe.

Eine besonders ansprechende Art, die Information darzustellen, welche in der Matrix M gespeichert ist, leisten die *Coxeter-Dynkin-Diagramme* (im folgenden kurz *Diagramme* genannt). Dies sind ungerichtete, beschriftete Graphen mit der Eckenmenge S. Zwei Ecken $s,t \in S$ sind durch eine Kante verbunden, falls $m(s,t) \in \mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{\infty\}$, und die Kante trägt dann die Beschriftung $m(s,t)$ $\big(= m(t,s)\big)$. Das Diagramm für die Diedergruppe D_n besteht also aus zwei Ecken, und für $n > 2$ sind die beiden Ecken durch eine Kante mit Beschriftung n verbunden. Bei den "gebräuchlichsten" Coxetergruppen kommen Kanten mit der Beschriftung 3 besonders häufig vor; deshalb ist es üblich, die Beschriftung 3 wegzulassen. Eine Coxetergruppe heisst *irreduzibel*, falls das zugehörige Diagramm zusammenhängend (also insbesondere auch nicht leer) ist.

Es soll nun eine grundlegende Eigenschaft von Coxetergruppen erläutert werden. Die Coxetergruppe W habe das ausgezeichnete Erzeugendensystem S. Für eine Teilmenge $I \subseteq S$ bezeichne W_I die Untergruppe von W, die von den Elementen in I erzeugt wird. Die Gruppe W_I besteht also aus der Menge aller I-Wörter in W. Die Untergruppen von

1) Man benützt den Buchstaben "W", weil die Weylgruppen prominente Beispiele für Coxetergruppen sind.

W der Form W_I heissen *standard parabolische*[2] Untergruppen. Natürlich ist $W_\varnothing$ die triviale Untergruppe $\{e\}$ von W. Es sei $s \in S$. Was ist $W_{\{s\}}$? Nach Definition ist $W_{\{s\}}$ die Untergruppe von W, die von s erzeugt wird, wegen $s^2 = e$ also $W_{\{s\}} = \{e, s\}$. Aber könnte es nicht sein, dass in W sogar die Relation $s = e$ gilt? – Dass dies nicht so ist, ist keineswegs trivial. Tatsächlich gilt aber der folgende *Fundamentalsatz für Coxetergruppen*.

Fundamentalsatz. *Sei W eine Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S und Coxetermatrix M. Sei $I \subseteq S$. Dann ist W_I eine Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem I und Coxetermatrix $M|_{I \times I}$.*

Der Satz besagt, dass die zusätzlichen Relationen $(st)^{m(s,t)} = e$ für $s \in S - I$, $t \in S$, $m(s,t) \neq \infty$ unter den I-Wörtern keine zusätzlichen Relationen erzwingen.

Besonders anschaulich lässt sich die Aussage des Fundamentalsatzes für Coxetergruppen anhand der Diagramme darstellen. Das Diagramm von W_I ist der von der Eckenmenge I induzierte Subgraph des Diagramms von W.

Korollar. *Sei W eine Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S.*

(i) *Für $s \in S$ gilt $s \neq e$.*

(ii) *Für $s, t \in S$ mit $m(s,t) \neq \infty$ ist $m(s,t)$ die kleinste positive ganze Zahl m, für die $(st)^m = e$ gilt.*

(iii) *Für $s, t \in S$ mit $m(s,t) = \infty$ gilt $(st)^m \neq e$ für $m \neq 0$.*

Bei (i) ist $W_{\{s\}} = \langle s \,|\, s^2 = e \rangle$. Zu (ii): Für $s \neq t$ ist $W_{\{s,t\}}$ eine Diedergruppe der Ordnung $2m(s,t)$. Im Fall (iii) ist $W_{\{s,t\}}$ eine unendliche Diedergruppe.

Der Beweis des Fundamentalsatzes für Coxetergruppen geschieht mit Hilfe der *kanonischen Darstellung*. Sei V ein reeller Vektorraum mit Basis $(v_s)_{s \in S}$. Wir definieren die symmetrische Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $b(v_s, v_t) = -\cos \frac{\pi}{m(s,t)}$ für $s, t \in S$ $\left(\text{mit } \frac{\pi}{\infty} = 0\right)$. Für $s \in S$ ist die lineare Selbstabbildung ρ_s auf V gegeben durch $\rho_s : v \mapsto v - 2b(v, v_s)v_s$ eine Spiegelung an der Hyperebene $\{\, v \in V \,|\, b(v, v_s) = 0 \,\}$ längs v_s. Allgemeiner gilt für $s, t \in S$ mit $m(s,t) \neq \infty$ die Identität $\left(\rho_s \circ \rho_t\right)^{m(s,t)} = \mathrm{id}_V$. Wir erhalten deshalb $\rho : W \to \operatorname{Aut} V$ mit $\rho_{w_1 w_2} = \rho_{w_1} \circ \rho_{w_2}$ (einen Gruppenhomomorphismus). Dies wird die kanonische Darstellung von (W, S) genannt.[3] Entscheidend für die Nützlichkeit der kanonischen Darstellung ist die Tatsache, dass der Gruppenhomomorphismus ρ injektiv ist. Das wurde von Tits bewiesen.

Beispiele (zweiter Teil)

Als letztes in unserer Liste von Beispielen folgt noch ein etwas anspruchsvolleres, jenes mit Diagramm

2) Der Ausdruck "standard parabolisch" stammt aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen.

3) Falls die Bilinearform b entartet ist, so ist es für geometrische Überlegungen zweckmässig, die duale Darstellung von ρ zu betrachten.

Die zugehörige Gruppenpräsentierung lautet

$$W = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^3 = (rt)^2 = e \rangle .$$

Wir wollen nun die kanonische Darstellung von W beschreiben. Es sei V der reelle Vektorraum mit Basis (v_r, v_s, v_t). Für $u \in \{r, s, t\}$ ist ρ_u die Spiegelung an der Ebene $H_u = \{ v \in V \mid b(v, v_u) = 0 \}$ längs v_u. Wir haben

$$\begin{aligned} H_r &= \{ x_r v_r + x_s v_s + x_t v_t \in V \mid 2x_r - x_s = 0 \} , \\ H_s &= \{ x_r v_r + x_s v_s + x_t v_t \in V \mid -x_r + 2x_s - 2x_t = 0 \} , \\ H_t &= \{ x_r v_r + x_s v_s + x_t v_t \in V \mid -x_s + x_t = 0 \} . \end{aligned}$$

Nun soll die kanonische Darstellung von W "konkreter" beschrieben werden. Dazu benötigen wir einen dreidimensionalen reellen Vektorraum. Für unsere Zwecke eignet sich dazu der Vektorraum $\mathcal{S}$ der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen. Als Basis von $\mathcal{S}$ wählen wir die Matrizen

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Der Vektorraumisomorphismus $\vartheta : V \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}$, welcher durch $\vartheta(v_u) = A_u$ für $u \in \{r, s, t\}$ gegeben ist, identifiziert den "abstrakten" Vektorraum V mit dem "konkreten" Vektorraum $\mathcal{S}$. Die Bilder der Ebenen H_u sind

$$\mathcal{H}_u := \vartheta(H_u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \,\middle|\, (*_u) \right\}$$

mit

$$(*_r) \;\; a = c , \qquad (*_s) \;\; a = 2b , \qquad (*_t) \;\; b = 0 .$$

Die lineare Selbstabbildung $\tilde{\rho}_u := \vartheta \circ \rho_u \circ \vartheta^{-1}$ auf $\mathcal{S}$ ist die Spiegelung an der Ebene $\mathcal{H}_u$ längs A_u. Wir setzen

$$U_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nun können wir die Spiegelungen $\tilde{\rho}_u$ für $u \in \{r, s, t\}$ folgendermassen beschreiben:

$$\tilde{\rho}_u(A) = {}^{\mathrm{t}}U_u A U_u \qquad (A \in \mathcal{S}) \tag{1}$$

(${}^{\mathrm{t}}U_u$ ist die Transponierte der Matrix U_u), und wir erhalten dann den Gruppenhomomorphismus $\tilde{\rho} : W \to \operatorname{Aut} \mathcal{S}$.

Mit $\mathcal{P} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S} \;\middle|\; a > 0 \text{ und } ac - b^2 > 0 \right\} \subseteq \mathcal{S}$ bezeichnen wir den Kegel[4)] der positiv definiten Matrizen. Aus der Formel (1) wird ersichtlich, dass die Gruppe

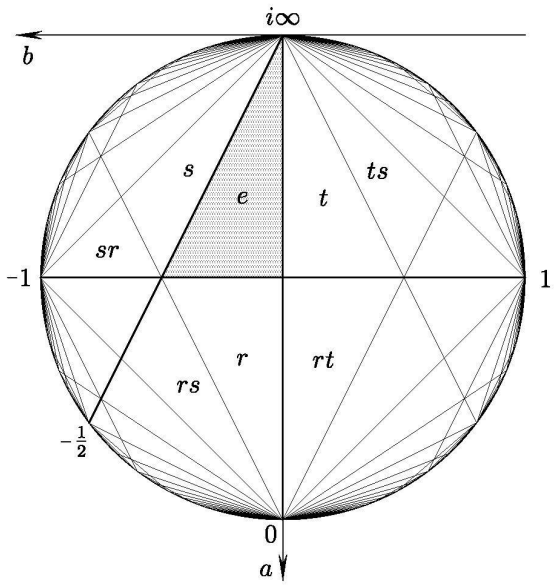
4) Ein *Kegel* $\mathcal{C}$ ist eine Teilmenge eines reellen Vektorraumes mit der Eigenschaft

$$x \in \mathcal{C}, \; \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \Longrightarrow \lambda x \in \mathcal{C} .$$

$\{\tilde{\rho}_w \mid w \in W\}$ den Kegel $\mathcal{P}$ auf sich abbildet. Der Kegel $\mathcal{P}$ und die affine Ebene $\mathcal{A} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S} \;\middle|\; a + c = 2 \right\}$ schneiden sich in der Kreisscheibe

$$\mathcal{D} := \mathcal{P} \cap \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2-a \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \;\middle|\; (a-1)^2 + b^2 < 1 \right\} .$$

Sie ist in der folgenden Figur dargestellt. Die eingezeichneten Segmente sind die Schnitte der Ebenen $\tilde{\rho}_w(\mathcal{H}_u)$ für $w \in W$, $u \in \{r, s, t\}$ mit $\mathcal{D}$. Die Kammern, die dabei entstehen, stehen in bijektiver Korrespondenz zu den Elementen der Gruppe W. Der Durchschnitt des Kegels $\mathcal{F} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{S} \;\middle|\; a \le c\,,\ a \ge 2b\,,\ b \ge 0\,,\ a > 0 \right\}$ mit der affinen Ebene $\mathcal{A}$ ist in der Figur schattiert.



Wir sehen: für jede Matrix $A \in \mathcal{P}$ gibt es $w \in W$ mit $\tilde{\rho}_w(A) \in \mathcal{F}$. Liegt dabei $\tilde{\rho}_w(A)$ im *Innern* von $\mathcal{F}$, so ist w eindeutig bestimmt. In jedem Fall gibt es zu $A \in \mathcal{P}$ nur endlich viele $w \in W$ mit $\tilde{\rho}_w(A) \in \mathcal{F}$. Mehr zur Reduktionstheorie der positiv definiten quadratischen Formen, auch im höherdimensionalen Fall, ist etwa im Buch [Si] zu finden.

Die Kreisscheibe $\mathcal{D}$ kann bijektiv auf die obere Halbebene $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ abgebildet werden, nämlich durch $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & 2-a \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{-b+i\sqrt{1-(a-1)^2-b^2}}{a}$. Mit Ausnahme von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ können wir auch die Matrizen auf dem Rand der Kreisscheibe $\mathcal{D}$ in dieselbe Formel einsetzen. Sie werden dabei auf die reelle Achse abgebildet. Der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ordnen wir als Bild den Punkt $i\infty$ zu. Die Bilder der Enden der Segmente sind dann die rationalen Zahlen vereinigt mit $\{i\infty\}$.

4 Endliche und affine Coxetergruppen

Für die Coxetergruppe W mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S und Coxetermatrix $M = \big(m(s,t)\big)_{s,t\in S}$ betrachten wir wie bei der Konstruktion der kanonischen Darstellung nochmals die symmetrische Matrix $B = \left(-\cos\frac{\pi}{m(s,t)}\right)_{s,t\in S}$.

Die *endlichen* Coxetergruppen lassen sich dadurch charakterisieren, dass die zugehörige symmetrische Matrix B positiv definit ist, was nach einem bekannten Kriterium (siehe z.B. [Si, p. 107]) damit äquivalent ist, dass alle ihre Hauptminoren positiv sind.

Eine *affine* Coxetergruppe ist eine irreduzible Coxetergruppe mit positiv semidefiniter aber nicht positiv definiter Matrix B. Mit anderen Worten: B ist singulär, aber jeder echte Hauptminor von B ist positiv (und damit jede echte standard parabolische Untergruppe endlich).

Bei den Beispielen im vorherigen Abschnitt sind alle Coxetergruppen vom Rang kleiner oder gleich 2, ausgenommen die unendliche Diedergruppe, endliche Coxetergruppen. Die unendliche Diedergruppe ist eine affine Coxetergruppe. Das letzte Beispiel im vorangegangenen Abschnitt beschreibt eine Coxetergruppe, welche weder endlich noch affin ist.

Mit der Formel in Proposition B im nächsten Abschnitt lassen sich die Ordnungen derjenigen endlichen Coxetergruppen berechnen, welche standard parabolische Untergruppen von affinen Coxetergruppen sind. Es stellt sich deshalb die Frage, welche irreduziblen Coxetergruppen standard parabolische Untergruppen von affinen Coxetergruppen sein können. Ist W eine endliche Coxetergruppe und $\rho : W \to \operatorname{Aut} V$ ihre kanonische Darstellung, so nennen wir W *kristallographisch*, wenn W ein Gitter in V stabilisiert (ein *Gitter* in V ist die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen einer Vektorraumbasis von V). Die Antwort auf die obige Frage lautet: Unter den irreduziblen endlichen Coxetergruppen kommen genau die kristallographischen als standard parabolische Untergruppen affiner Coxetergruppen vor. Von den irreduziblen endlichen Coxetergruppen sind lediglich die Diedergruppen der Ordnung $2m$ für $m \neq 3, 4, 6$ sowie die Coxetergruppen mit Diagramm oder nicht kristallographisch.

5 Alternierende Summenformeln

Zur Berechnung der Ordnung einer endlichen Coxetergruppe liegen zahlreiche Formeln vor (siehe etwa [C3]). Eine der bemerkenswertesten sei jene in McMullens Artikel [Mc], behauptet Coxeter [C4]. Neu war allerdings jene Formel nicht. Ich werde im folgenden eine kleine Modifikation vorschlagen, welche den Rechenaufwand drastisch reduziert. Wir benötigen die folgenden beiden alternierenden Summenformeln.

Proposition A. *Sei W eine endliche Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S. Dann gilt*

$$\sum_{I\subseteq S}(-1)^{|I|}\,\frac{1}{|W_I|} = \frac{1}{|W|}\,.$$

Proposition B. *Sei W eine (irreduzible) affine Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S. Dann gilt*

$$\sum_{I \subsetneq S} (-1)^{|I|} \frac{1}{|W_I|} = 0.$$

Proposition A (für $|S|$ ungerade) ist [Mc, Theorem 4] und wurde ursprünglich von Witt [Wi] gefunden. Proposition B ist [Mc, Theorem 3], und eine Referenz hierzu ist Serres Artikel [Se].[5)]

Als Anwendung von Proposition B berechnet McMullen die Ordnungen von drei endlichen kristallographischen Coxetergruppen. Er schreibt: "[...] although its character is elementary, the calculations involved in its application are lengthy (in n-dimensions, there are $2^{n+1} - 1$ terms [...])." Wir zeigen im Rest unseres Beitrages, dass man mit wesentlich weniger Rechenaufwand ebenfalls zum Ziel kommt! Es sei W eine affine Coxetergruppe mit ausgezeichnetem Erzeugendensystem S. Wir fixieren eine Ecke $s_0 \in S$ des Diagramms $\mathscr{C}$ von W und definieren die folgende Familie $\mathscr{K}(s_0)$ von Teilmengen von S:

$$\mathscr{K}(s_0) := \left\{ J \subsetneq S \;\middle|\; \begin{array}{l} s_0 \in J \text{ und der Subgraph von } \mathscr{C} \text{ indu-} \\ \text{ziert von } J \text{ ist zusammenhängend} \end{array} \right\} \cup \{\varnothing\}.$$

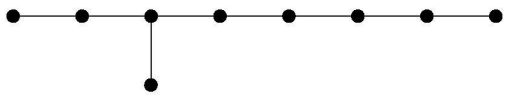
Für $J \in \mathscr{K}(s_0)$ setzen wir

$$J^* := \left\{ s \in S - (J \cup \{s_0\}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt kein } t \in J \text{ so, dass} \\ \{s, t\} \text{ eine Kante in } \mathscr{C} \text{ ist} \end{array} \right\}.$$

Da es zwischen $s \in J^*$ und $t \in J$ keine Kante im Diagramm $\mathscr{C}$ gibt, ist für $H \subseteq J^*$ der Subgraph von $\mathscr{C}$ induziert von $H \cup J$ die Vereinigung der Subgraphen induziert von H und von J. Es gilt daher $W_{H \cup J} = W_H \times W_J$ und insbesondere $|W_{H \cup J}| = |W_H| \cdot |W_J|$. Läuft nun J über die Elemente von $\mathscr{K}(s_0)$ und H über die Teilmengen von J^*, so zählen $H \cup J$ gerade alle echten Teilmengen von S auf. Gemäss Propositionen A und B gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{I \subsetneq S} (-1)^{|I|} \frac{1}{|W_I|} = \sum_{J \in \mathscr{K}(s_0)} \sum_{H \subseteq J^*} (-1)^{|H \cup J|} \frac{1}{|W_{H \cup J}|} \\ &= \sum_{J \in \mathscr{K}(s_0)} (-1)^{|J|} \frac{1}{|W_J|} \sum_{H \subseteq J^*} (-1)^{|H|} \frac{1}{|W_H|} = \sum_{J \in \mathscr{K}(s_0)} (-1)^{|J|} \frac{1}{|W_J| \cdot |W_{J^*}|}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir wollen nun mittels der Formel (2) die Ordnung der grössten exzeptionellen endlichen Coxetergruppe (Typ E_8) berechnen. Das Diagramm der entsprechenden affinen Coxetergruppe W sieht so aus:

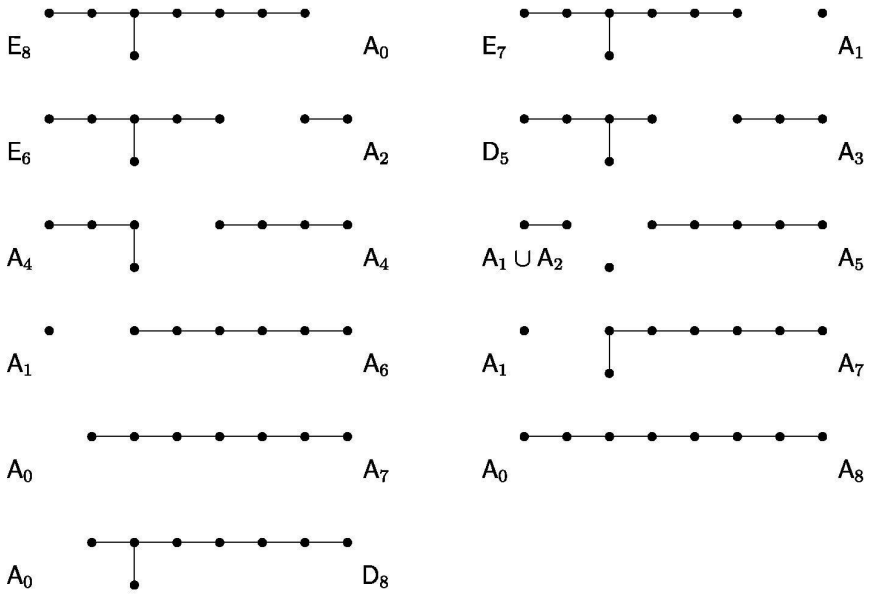


5) In der Tat sind beide Propositionen Spezialfälle einer Formel, welche die Poincaréreihe einer Coxetergruppe mit ihrer Eulercharakteristik verbindet.

Es ist zweckmässig, Namen für gewisse Typen von Diagrammen und der zugehörigen Coxetergruppen einzuführen. Ein Y-förmiger Graph, dessen drei Beine die Längen $p-1$, $q-1$ und $r-1$ besitzen und die (unsichtbare) Beschriftung 3 tragen, heisst Diagramm vom Typ $\mathsf{Y}_{p,q,r}$. Der oben gezeichnete Graph ist also vom Typ $\mathsf{Y}_{2,3,6}$. – Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass $\mathsf{Y}_{p,q,r}$ genau dann Typ einer affinen Coxetergruppe ist, wenn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ gilt; solche Tripel (p,q,r) mit $p \leq q \leq r$ gibt es drei. – Offensichtlich sind sämtliche zusammenhängenden Subgraphen eines Diagramms vom Typ $\mathsf{Y}_{p,q,r}$ wieder von einem Typ $\mathsf{Y}_{p',q',r'}$ für geeignete p', q', r'. Für gewisse Tripel (p,q,r) haben sich spezielle Namen eingebürgert:

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_n &= \mathsf{Y}_{1,1,n} && (n \geq 0,\ \mathsf{A}_0 \text{ ist der Typ des leeren Graphen}) \\
\mathsf{D}_n &= \mathsf{Y}_{2,2,n-2} && (n \geq 4) \\
\mathsf{E}_n &= \mathsf{Y}_{2,3,n-3} && (n = 6,7,8)\,.
\end{aligned}$$

Gehen wir zurück zum Beispiel. Als Ecke s_0 wählen wir die äusserste Ecke im längsten Bein des oben gezeichneten Diagramms. Die Familie $\mathcal{K}(s_0)$ besteht dann aus 11 Elementen. Hier ist die Liste: für $J \in \mathcal{K}(s_0)$ steht rechts der Typ von W_J und links jener von W_{J^*}.



Mit $\chi(\mathsf{X}_n)$ bezeichnen wir den Reziprokwert der Ordnung einer endlichen Coxetergruppe vom Typ X_n. Die Formel (2) liefert

$$\begin{aligned}
0 = {} & \chi(\mathsf{E}_8)\cdot\chi(\mathsf{A}_0) - \chi(\mathsf{E}_7)\cdot\chi(\mathsf{A}_1) + \chi(\mathsf{E}_6)\cdot\chi(\mathsf{A}_2) - \chi(\mathsf{D}_5)\cdot\chi(\mathsf{A}_3) \\
& + \chi(\mathsf{A}_4)\cdot\chi(\mathsf{A}_4) - \chi(\mathsf{A}_1)\cdot\chi(\mathsf{A}_2)\cdot\chi(\mathsf{A}_5) + \chi(\mathsf{A}_1)\cdot\chi(\mathsf{A}_6) - \chi(\mathsf{A}_1)\cdot\chi(\mathsf{A}_7) \\
& - \chi(\mathsf{A}_0)\cdot\chi(\mathsf{A}_7) + \chi(\mathsf{A}_0)\cdot\chi(\mathsf{A}_8) + \chi(\mathsf{A}_0)\cdot\chi(\mathsf{D}_8)\ .
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die Werte

$$\frac{1}{\chi(\mathsf{A}_n)} = (n+1)! \quad (n = 0, \ldots, 8) \qquad \frac{1}{\chi(\mathsf{D}_n)} = 2^{n-1}\, n! \quad (n = 4, \ldots, 8)$$
$$\frac{1}{\chi(\mathsf{E}_6)} = 51\,840 \qquad \frac{1}{\chi(\mathsf{E}_7)} = 2\,903\,040$$

ein, die sich induktiv aus $\chi(\mathsf{A}_0) = 1$ bestimmen lassen, so folgt

$$\frac{1}{\chi(\mathsf{E}_8)} = 696\,729\,600\ .$$

Bemerkung zum Schluss. In Coxeters Buch [C2] – ein Buch, das auch in McMullens Literaturliste aufgeführt ist! – wird $\chi(\mathsf{E}_8)$ durch die Methode der relativen Anzahl Facetten in der E_8-Parkettierung von $\mathbb{R}^8$ berechnet. Die *Rechnung* [C2, Chap. XI, p. 204] und die obige *Rechnung* sind identisch. McMullen meint: "The method is, in a vague sense, related to [the method of relative numbers of faces in a tessellation]." Ich hoffe, die Situation habe sich durch den vorliegenden Artikel etwas aufgeklärt.

Literatur

[Bo] N. Bourbaki: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6. Hermann 1968. Masson 1981

[Br] K.S. Brown: Buildings. Springer 1989

[C1] H.S.M. Coxeter: Discrete groups generated by reflections. Ann. of Math. **35**, 588–621 (1934). The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$. J. London Math. Soc. **10**, 21–25 (1935)

[C2] H.S.M. Coxeter: Regular polytopes. 3rd ed. Dover Publications 1973

[C3] H.S.M. Coxeter: Regular and semi-regular polytopes. III. Math. Z. **300**, 3–45 (1988)

[C4] H.S.M. Coxeter: The evolution of Coxeter-Dynkin diagrams. In: T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider, A. Ivić Weiss (eds.) Polytopes: abstract, convex and computational. NATO ASI Series C - Vol. **440**. Kluwer 1994, pp. 21–42

[Hi] H. Hiller: Geometry of Coxeter groups. Research Notes in Mathematics **54**. Pitman 1982

[Hu] J.E. Humphreys: Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**. Cambridge University Press 1990

[Mc] P. McMullen: The order of a finite Coxeter group. Elem. Math. **46**, 121–130 (1991)

[Se] J.-P. Serre: Cohomologie des groupes discrets. In: Prospects in Mathematics. Ann. of Math. Studies **70**, pp. 77–169. Princeton University Press and University of Tokyo Press 1971 = Œuvres, Collected Papers, Vol. II: 1960–1971, pp. 593–685. Springer 1986

[Si] C.L. Siegel: Lectures on the geometry of numbers. Springer 1989

[Wi] E. Witt: Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **14**, 289–322 (1941)

Ruedi Suter
Mathematik
ETH Zentrum
8092 Zürich
Schweiz