Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **52 (1997)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 52 (1997) 37 – 42
0013-6018/97/010037-6 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1997

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1997 an:

– Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
  oder
– Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1117: Es bezeichnen die Punkte $A(-a,0)$, $B(a,0)$ und $C(0,b)$ im kartesischen Koordinatensystem die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit festem $a > 0$ und variablem $b > 0$. Wir bezeichnen mit y_U, y_H, y_S und y_I die Ordinaten des Umkreismittelpunktes, des Höhenschnittpunktes, des Schwerpunktes und des Inkreismittelpunktes des Dreiecks ABC. Man berechne

$$\lim_{b \to a\sqrt{3}} \frac{y_I - y_H}{y_I - y_S} : \frac{y_U - y_H}{y_U - y_S}$$

Juan-Bosco Romero Márquez, Valladolid, E

Aufgabe 1118: Let $S(n)$ be defined as the smallest integer such that $(S(n))!$ is divisible by n (Smarandache Function). Find

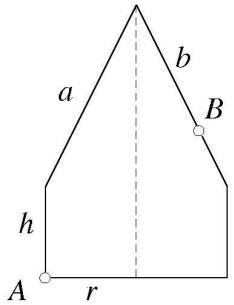
$$\max_n \left[\frac{S(n)}{n}\right]$$

over all composite integers $n \neq 4$.

T. Yau, Tucson, USA

Aufgabe 1119 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Figur stellt den Achsenschnitt eines Rotationskörpers dar, der sich aus einem Zylinder und einem Kegel zusammensetzt. Gesucht ist eine Methode zur Bestimmung des kürzesten Weges von A nach B auf der

Körpermantelfläche. Welche Länge hat dieser Weg im Spezialfall $a = 2b = 2r$ und $h = \pi r/\sqrt{3}$?



Rolf Rose, Magglingen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 1996

Aufgabe 1105. Es sei I der Inkreismittelpunkt und U der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC. Die verlängerten Winkelhalbierenden des Dreiecks sollen den Umkreis in den Punkten D, E resp. F schneiden. Man beweise

$$\overrightarrow{UI} = \overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF}.$$

Šefket Arslanagić, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Lösungen eingetroffen: Francisco Bellot (Valladolid, E), G. Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), André Calame (Sauges, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Hans Engelhaupt (Gundelsheim, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Ivan Paasche (Stockdorf, D), Günter Pickert (Giessen, D), J. Schaer (Calgary, Canada), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Michael Vowe*: Winkelbetrachtungen mit Umfangswinkeln zeigen, dass die Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC die Seiten des Dreiecks DEF rechtwinklig schneiden. Der Inkreismittelpunkt I ist somit zugleich der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks DEF. Es ist $\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE}$ senkrecht zu $\overrightarrow{DE}$ (Rhombus), also hat der von U ausgehende Vektor $\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF}$ seine Spitze auf der von F ausgehenden Höhe. Mit zyklischer Permutation folgt dann

$$\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{UE} + \overrightarrow{UF} = \overrightarrow{UH} = \overrightarrow{UI}.$$

Dieter Koller zeigt, dass die Aussage der Aufgabe sinngemäss auch für die Ankreise gilt, wenn jeweils eine innere und zwei äussere Winkelhalbierende verwendet werden. *Francisco Bellot* weist darauf hin, dass die Aufgabe an der griechischen Mathematik-Olympiade 1989 gestellt wurde und im Buch von *D. Kontogiannis: Dianismatikos Logismos kai Analytike Geometria*, Atenas 1994, publiziert ist.

Aufgabe 1106. Eine symmetrische 0-1-Münze wird wiederholt geworfen. Für jede 1 erhalten Sie einen Franken. Sie dürfen das Spiel jederzeit abbrechen und behalten, was Sie bis dahin gewonnen haben. Sobald aber zweimal hintereinander 0 erscheint, ist das Spiel aus, und Sie haben alles verloren. (Irgendwelche Ähnlichkeiten mit realen Lebenssituationen sind rein zufällig.) – Welches ist die optimale Strategie, und welchen Erwartungswert hat dann dieses Spiel?

Christian Blatter, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Die Aufgabe hat ein aussergewöhnlich lebhaftes Echo ausgelöst. Einerseits sind sehr unterschiedliche Lösungsvorschläge eingetroffen, andererseits wurde die Aufgabe von mehreren Lösern als anregend und interessant bezeichnet. Es haben uns 10 Zuschriften erreicht: Alexander Bofinger (Fredericton, Canada), Hans Egli (Zürich, CH), Hans Engelhaupt (Gundelsheim, D), Harald Fripertinger (Graz, A), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener und Roland Wyss (Oberdorf, CH und Flumenthal, CH), Jean Piquerez (Croix-de-Rozon, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Klaus Thews (Schweinfurt, D), Michael Vowe (Therwil, CH).

Die Wahl eines Strategiekonzepts steht an der Spitze der Aufgabe. In allen vorgeschlagenen Varianten wird zuerst eine nicht-negative, ganze Zahl k gewählt. Anschliessend haben die verschiedenen Autoren folgende Annahmen getroffen:

A) Man werfe die Münze k-mal. (*Michael Vowe*, *Jean Piquerez*)

B) Man werfe die Münze zuerst k-mal. Falls der letzte Wurf eine Eins war, führe man das Spiel so lange weiter bis eine Null erscheint. (*Walther Janous*)

C) Man breche das Spiel ab, sobald zum k-ten Mal eine Null erscheint. (*Hans Egli*)

D) Nach einer Eins spiele man grundsätzlich weiter; nach einer Null spiele man nicht weiter, wenn man insgesamt schon k Einsen geworfen hat. (*Hans Egli*, *Hans Engelhaupt*, *Harald Fripertinger*, *André Kiener und Roland Wyss*, *Fritz Siegerist*, *Klaus Thews*)

Das Strategiekonzept A) führt nicht zum optimalen Erwartungswert, wie dies durch das A) erweiternde Konzept B) klar wird. Die Erwartungswerte $E_A(k)$ des Konzepts A) konnte *Michael Vowe* mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen F_k ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$) geschlossen angeben:

$$E_A(k) = \frac{1}{5 \cdot 2^k}\big((7k-2)F_k + 4kF_{k-1}\big)$$

Die zugehörigen, von *Jean Piquerez* angegebenen numerischen Werte

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$E_A(k)$	0.500	1.000	1.250	1.375	1.406	1.375	1.305	1.211

legen nahe, dass unter dem Konzept A) die Strategie $k = 5$ den grössten Erwartungswert erzielen würde.

Walther Janous erhält für das Konzept B) den expliziten Ausdruck

$$E_B(k) = \frac{1}{5 \cdot 2^k}\big((7k+3)F_k + (4k+5)F_{k-1}\big) = E_A(k) + \frac{F_{k+1}}{2^k}\ .$$

Diese Werte übertreffen also die Werte des Konzepts A) um $F_{k+1}/2^k$. (Dieser Zuschuss erklärt sich so: Im binären Baum der Tiefe k haben genau F_{k+1} der 2^k Enden die Eigenschaft, dass zuletzt eine Eins geworfen wird und zuvor keine Doppelnull vorkommt. Bei diesen Enden spielt man weiter bis zur ersten Null. Der Erwartungswert der Auszahlung ab einem solchen Ende beträgt aber genau 1, was weiter unten als $E_D(0)$ berechnet wird.) Die Erwartungswerte $E_B(k)$ haben ihr Maximum bei $k = 4$: $E_B(4) = 1.6875$. Dieser Wert wird sich auch unter dem Konzept D) als Maximalwert herausstellen.

Hans Egli hat $E_C(1) = 1$, $E_C(2) = 1.5$, $E_C(3) = 1.25$ berechnet und sich dann — wie die übrigen Autoren — dem offensichtlich besseren Konzept D) zugewandt. Dazu hat *Fritz Siegerist* die einfachste Berechnung präsentiert, der wir nun folgen.

Begründung des Strategiekonzepts D) und Berechnung des zugehörigen Erwartungswerts: Hat man eine Eins geworfen, macht man weiter, weil damit der Erwartungswert immer steigt. Nach einer Null macht man nur weiter, wenn damit der Erwartungswert nicht sinkt. Nach einer Doppelnull hört man gezwungenermassen auf. Die optimale Strategie ist deshalb vom folgenden Typ: Man warte eine bestimmte Anzahl k von Einsen ab und werfe dann bis zur ersten Null weiter.

Betrachten wir zuerst den Fall $k = 0$. Wie gross ist der Erwartungswert $E_D(0)$ der Anzahl Einsen, wenn man das Spiel beim Erscheinen der ersten Null abbricht? Da man eine Eins mit Wahrscheinlichkeit 0.5^2, zwei Einsen mit der Wahrscheinlichkeit 0.5^3 usw. erhält, ergibt sich:

$$E_D(0) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot 0.5^{i+1} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty} 0.5^{i+1}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} 0.5^j = 1$$

Der Erwartungswert $E_D(k)$ für die Auszahlung kann nun auf $E_D(0)$ zurückgeführt werden. Dazu beachte man, dass man nach dem Werfen einer Eins auf genau zwei Arten zur nächsten Eins gelangen kann: Entweder wirft man direkt im nächsten Wurf eine Eins mit der Wahrscheinlichkeit 0.5, oder man wirft mit der Wahrscheinlichkeit 0.5^2 zuerst eine Null und dann eine Eins. Insgesamt beträgt also die Wahrscheinlichkeit, von einer soeben geworfenen Eins zur nächsten zu gelangen, 0.75. Hat man auf diese Weise k Einsen erhalten, wird das Spiel bis zur nächsten Null fortgesetzt und liefert die Auszahlung $k + E_D(0)$ mit der Wahrscheinlichkeit 0.75^k. Also gilt

$$E_D(k) = 0.75^k \cdot (k + E_D(0)) = 0.75^k \cdot (k+1) \quad \text{oder} \quad \frac{E_D(k)}{E_D(k-1)} = 0.75 \cdot \frac{k+1}{k}\ .$$

Setzt man den Quotienten $E_D(k)/E_D(k-1)$ auf 1, erhält man (ohne Differentialrechnung) denjenigen Wert von k, für den der Erwartungswert maximal wird:

$$E_D(3) = E_D(2) = \frac{27}{16} = 1.6875$$

Beide Strategien sowohl für $k = 2$ als auch für $k = 3$ sind demnach optimal.

Hans Engelhaupt hat noch weitere numerische Werte angegeben:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$E_A(k)$	1.0000	1.5000	1.6875	1.6875	1.5820	1.4238	1.2458	1.0679

Schliesslich haben *André Kiener und Roland Wyss* sowie *Klaus Thews* die Aufgabe auf eine Münze verallgemeinert, die mit der Wahrscheinlichkeit p eine Eins und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ eine Null liefert. Mit den obigen Überlegungen erhält man ebensoschnell:

$$E_D(k) = (p + qp)^k \cdot \left(k + \frac{p}{q}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{E_D(k)}{E_D(k-1)} = (p + qp) \cdot \frac{k + \frac{p}{q}}{k + \frac{p}{q} - 1}$$

Diesen Quotienten setzen sie auf 1 und erhalten durch Abrunden mit der Gauss'schen Klammer dasjenige $k_{\max}$, für welches $E_D(k_{\max})$ maximal wird:

$$k_{\max} = \left\lfloor 1 + \frac{p}{q^2} \right\rfloor$$

Fällt $1 + \frac{p}{q^2}$ ganzzahlig aus, so sind die Erwartungswerte für $k_{\max} - 1$ und für $k_{\max}$ gleich gross und maximal. Die folgende Tabelle soll die Attraktivität des Spieles für verschiedene Erfolgswahrscheinlichkeiten der Münze veranschaulichen.

	ungünstige Münze					günstige Münze			
p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
q	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
k	1	1	1	2	2; 3	4	8	20; 21	90; 91
$E(k)$	0.2111	0.4500	0.7286	1.0923	1.6875	2.7383	4.8593	10.6081	40.0685

Aufgabe 1107 (Die einfache dritte Aufgabe). Es ist bekannt, wie man $a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ in zwei reelle Linearfaktoren zerlegt. Dagegen sagt man, $a^2 + b^2$ sei nicht zerlegbar. Da ist es vielleicht überraschend, dass es trotzdem eine Zerlegung in zwei nichttriviale reelle Faktoren gibt. Natürlich handelt es sich dabei nicht um Linearfaktoren. Man bestimme eine solche nichttriviale Zerlegung und gebe an, unter welcher Bedingung für natürliche a und b sich sogar eine Zerlegung in zwei natürliche Faktoren ergibt.

Johannes Gollnick, Hamburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Šefket Arslanagić (Berlin, D), G. Bercea (München, D), Alexander Bofinger (Fredericton, Canada), J. L. Brenner (Palo Alto, USA), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Hans Egli (Zürich, CH), Hans Engelhaupt (Gundelsheim, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Rainer Pausch (Weiden, D), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D),

Fritz Siegerist (Meilen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Fast alle Löser schlagen die Zerlegung

$$a^2 + b^2 = \left(|a| + |b| + \sqrt{2|ab|}\right) \cdot \left(|a| + |b| - \sqrt{2|ab|}\right)$$

vor. Falls für natürliche Zahlen a und b das Produkt $2ab$ eine Quadratzahl ist, ergibt sich eine Zerlegung in natürliche Faktoren.

Heinz-Jürgen Seiffert fügt folgende Überlegung bei: Ersetzt man a durch a^2 und b durch $2b^2$, so erhält man

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab), \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Für $a, b \in \mathbb{N}$ gelten die Ungleichungen

$$2ab + 1 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq a^2 + 2b^2$$

mit Gleichheit auf beiden Seiten nur für $a = b = 1$. Daraus folgt aber, dass $a^4 + 4b^4$ $(a, b \in \mathbb{N})$ dann und nur dann eine Primzahl ist, wenn $a = b = 1$ gilt.

Einen weiteren Vorschlag bringt *Michael Vowe*: Setzt man in

$$x^3 + y^3 = (x^2 - xy + y^2)(x + y)$$

$x = a^{\frac{2}{3}}$, $y = b^{\frac{2}{3}}$, so erhält man

$$a^2 + b^2 = \left(a^{\frac{4}{3}} - (ab)^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) .$$

Falls a und b Kubikzahlen sind, ergibt sich eine Zerlegung in zwei natürliche Faktoren.