Die harmonische Reihe: Historisches und Mathematisches

Autor(en): **Stammbach, Urs**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **54 (1999)**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4701

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 54 (1999) 93 – 106
0013-6018/99/030093-14 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1999

Elemente der Mathematik

Die harmonische Reihe: Historisches und Mathematisches*

Urs Stammbach

Urs Stammbach studierte an der ETH Zürich, wo er 1965 bei Beno Eckmann mit einer Dissertation über die Homologietheorie der Gruppen promovierte. Nach einem mehrjährigen Aufenthalt an der Cornell University in Ithaca, NY wurde er 1969 Professor an der ETH in Zürich. In seiner Forschung beschäftigt er sich mit der homologischen Algebra und deren Anwendungen in der Gruppentheorie, insbesondere in der modularen Darstellungstheorie. In jüngerer Zeit bearbeitet er auch Themen aus der Geschichte der Mathematik. Er ist Autor bzw. Mitautor von mehreren Büchern. 1990 und 1991 amtete er als Präsident der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft. In seiner Freizeit beschäftigt er sich gerne mit Geschichte, Literatur und Musik.

1. Jedermann weiss, was die *harmonische Reihe* ist:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots .$$

Der Weg zur Unendlichkeit ist mit Paradoxien gepflästert. Wer eben Zeno's Paradoxon zu durchschauen beginnt, lässt sich von neuem verblüffen durch die Eigenschaften der harmonischen Reihe. Die überraschende Tatsache ihrer Divergenz wurde in der mittelalterlichen Mathematik erstaunlich früh entdeckt. Weitergehende Untersuchungen über das Wachstumsverhalten der Partialsummen zur harmonischen Reihe sind ohne analytische Methoden kaum denkbar. So wurden weitere Fortschritte erst durch Jakob und Johann Bernoulli, Euler und andere erzielt. Eulers Auseinandersetzung mit dem Thema führte zu einer numerischen Näherungsrechnung für Eulers Konstante γ auf 16 Dezimalen. Wenn Sie Lust und etwas Zeit haben, fordern Sie ihren PC heraus, es Euler gleich zu tun! – Urs Stammbach verfolgt, wie sich unser Verständnis rund um die harmonische Reihe im Zeitraum von rund 1350 bis 1750 entwickelt hat. In der Einbettung mathematischer Entwicklungen in ihrem historisch-biographischen Umfeld liegt ein besonderer Reiz. Sie ist ein Markenzeichen dieser Arbeit. *hrs*

*) Der Text entspricht im wesentlichen dem Inhalt von Vorträgen über dieses Thema, die am 27. November 1996 im Rahmen 13. Kolloquiums für Mathematiklehrer an der Universität Basel, am 26. Februar 1998 im Rahmen des 14. Eichstätter Kolloquiums zur Didaktik der Mathematik und am 11. Mai 1998 im Kolloquium über Didaktik an der Universität Essen gehalten wurden.

Aber nicht jedermann scheint zu wissen, weshalb sie so heisst. Sie heisst harmonisch, weil jedes ihrer Glieder das harmonische Mittel der beiden Nachbarglieder ist:

$$\frac{2\frac{1}{n-1}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} .$$

Jedermann weiss, dass die harmonische Reihe divergiert, aber wenige scheinen zu wissen, wann und durch wen diese Tatsache entdeckt worden ist.

In der Entwicklung der Mathematik nimmt die harmonische Reihe zweifellos einen wichtigen Platz ein. Und die Tatsache, dass die harmonische Reihe divergiert, hat profunde Konsequenzen: Die Welt würde zweifellos anders aussehen, wenn die harmonische Reihe konvergieren würde. Umso erstaunlicher ist es, dass die historischen Hintergründe, selbst unter Mathematikern, nicht allgemeiner bekannt sind. Hat der Mathematikunterricht in der Vergangenheit vielleicht allzusehr die historische Dimension vernachlässigt?

2. Beweise für die Divergenz der harmonischen Reihe allerdings sind wohlbekannt. Hier ist einer davon:

Man stellt fest, dass für jede natürliche Zahl a die Ungleichung

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{a^2} \geq \frac{a^2-a}{a^2} = 1-\frac{1}{a}$$

gilt. Daraus folgt

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{a^2} \geq 1 .$$

Somit sind die Partialsummen der harmonischen Reihe nach oben nicht beschränkt, und die Reihe divergiert.

Dies ist im wesentlichen der Beweis, den schon Jakob Bernoulli[1)] gegeben hat, und den wir in dieser oder in einer leicht abgewandelten Form auch heute noch in den Vorlesungen geben.

Der Beweis steht in der Arbeit *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis*, 1689; Teil XVI *Summa seriei infinitae harmonice progressionalium* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ & *est infinita* (siehe [1], p. 45ff), in der ersten der fünf berühmten "Dissertationen" (Arbeiten) über Reihen, die Jakob Bernoulli zwischen 1689 und 1704 veröffentlicht hat.

Jakob war allerdings nicht der erste! André Weil bemerkt im Vorwort der Ausgabe der Werke Jakob Bernoulli's (siehe [1], p. 12–13), dass die Divergenz der harmonischen Reihe bereits 1650 von Pietro Mengoli nachgewiesen worden sei,[2)] wobei Weil als sicher annimmt, dass Jakob Bernoulli die Schrift von Mengoli nicht gekannt hat.

---

1) Jakob Bernoulli lebte von 1654 bis 1705. Er studierte zuerst Theologie an der Universität Basel, beschäftigte sich aber schon während seines Studiums mit Mathematik. Nach einem längeren Auslandaufenthalt kehrte er nach Basel zurück und wurde 1687 Professor an der dortigen Universität.

2) Pietro Mengoli (1625–1686) war Schüler Cavalieris und wurde dessen Nachfolger an der Universität in Bologna.

Aber auch Mengoli war nicht der erste! Bereits um 1350 hatte nämlich Nicole Oresme die Divergenz der harmonischen Reihe entdeckt.[3)]

Diese früheren Resultate von Mengoli und Oresme[4)] scheinen beide wieder in Vergessenheit geraten zu sein: Auch für mathematische Entdeckungen muss offenbar die Zeit reif sein. Man vergleiche dazu auch [7], p. 91–93.

3. Auf Mengoli und auf Oresme nimmt Jakob Bernoulli in seiner Veröffentlichung nicht Bezug. Hingegen sagt er, die Divergenz der harmonischen Reihe sei vor ihm von seinem jüngeren Bruder Johann[5)] entdeckt worden: *Id primus deprehendit frater.*[6)]

Johann Bernoulli's Beweis war dieser. Er setzt

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=N$$

und subtrahiert davon gliedweise die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=N-1\ .$$

Er erhält[7)]

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1\ .$$

Nun rechnet er weiter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots\\&=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\\&\quad+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\\&\quad+\left(\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\\&\quad+\left(\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)+\cdots\end{aligned}$$

3) Nicole Oresme lebte von ca. 1320 bis 1382, zeitweise in Paris. Ab 1377 war er Bischof von Lisieux. Der Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe ist in einer Schrift von Oresme mit dem Titel *Quaestiones super Geometriam Euclidis* zu finden, die um 1350 geschrieben worden ist.

4) Die Beweise von Bernoulli, Mengoli und Oresme sind verschieden, für Details siehe Conway, Guy [4].

5) Johann Bernoulli lebte von 1667 bis 1748. Er wurde anfänglich von seinem um 13 Jahre älteren Bruder Jakob in der Mathematik unterrichtet, insbesondere in der Leibnizschen Differential- und Integralrechnung. Nach Reisen nach Genf und Paris wurde er 1695 Professor in Groningen. 1705 kehrte er nach Basel zurück, wo er nach dem Tode seines Bruders den Lehrstuhl für Mathematik übernahm.

6) Es mag erstaunen, dass Jakob hier mit seinem Bruder Johann so pfleglich umgeht, aber die beiden Brüder waren damals offenbar noch ein Herz und eine Seele; ihr Streit begann erst 1695.

7) Dieses Resultat war damals bereits bekannt; siehe z.B. Lord Viscount Brouncker: *The squaring of the hyperbola*, 1668; aber ebenso bei Mengoli und Leibniz. Ob Bernoulli das Resultat selbst entdeckt oder es einfach übernommen hat, weiss man nicht.

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

Man liest ab

$$N - 1 = N .$$

Dies ist ein Widerspruch.

4. Johann's Beweis ist sicher genial. Er erfüllt aber wohl die Ansprüche nicht, die wir heutzutage an einen mathematischen Beweis stellen. Zwar lässt sich mit dem heutigen Wissen daraus ein mathematisch korrekter Beweis konstruieren, aber zu Bernoulli's Zeiten waren einige der wesentlichen Tatsachen gar noch nicht bekannt. Schon Jakob Bernoulli war sich bewusst, dass die Schlussweise bedenklich ist: Er beschreibt in der oben erwähnten Publikation den Beweis seines Bruders Johann ausführlich, fügt dann aber hinzu, dass man diese Methode nicht ohne besondere Vorsicht anwenden dürfe: *Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo.* Zur Illustration setzt er

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots = S$$

und subtrahiert gliedweise

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots = S - 2 .$$

Er erhält

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = 2 ,$$

im Widerspruch zum obigen Resultat!

Das Beispiel illustriert so nebenbei, wie sich der Begriff des mathematischen Beweises im Laufe der Zeit verändert hat. Es zeigt aber auch auf überzeugende Weise, dass es in der Mathematik neben den strengen Beweisen Überlegungen heuristischer Art gibt, die auf einer gewissen Stufe der Erkenntnis und des Entdeckens eine grosse Rolle spielen: Die Mathematik besteht nicht nur darin, Aussagen zu beweisen, sondern ebensosehr auch darin, wohlbegründete Vermutungen zu erarbeiten.

5. Gerade an der harmonischen Reihe kann man diesen Schritt, nämlich die Erarbeitung einer wohlbegründeten Vermutung auf einem leicht zugänglichen Niveau illustrieren. Man trage zu diesem Zweck (etwa mit Hilfe eines Computeralgebrasystems) die Partialsummen der harmonischen Reihe gegen den Index auf. Macht man dies für genügend viele Glieder, so sind in der Figur die einzelnen Punkte nicht mehr einzeln zu identifizieren und sie verschmelzen zu einer Kurve (siehe Figur 1).

Was ist das für eine Kurve? Die Vermutung liegt auf der Hand, und sie ist richtig. Es ist in der Tat die Logarithmuskurve, oder wenigstens fast: Es ist die um weniges nach oben verschobene Logarithmuskurve.

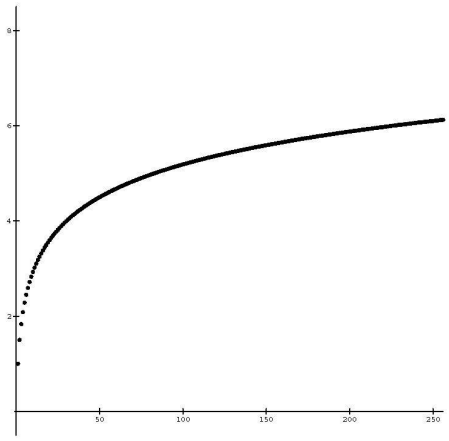

Fig. 1 Die harmonische Reihe, 256 Glieder

Um das näher zu erklären, betrachten wir die Funktion $x \mapsto 1/x$. Für die Summe der Inhalte der in Figur 2 eingezeichneten Rechtecke erhält man unmittelbar

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+1) \ .$$

Dies beweist übrigens noch einmal die Divergenz der harmonischen Reihe.

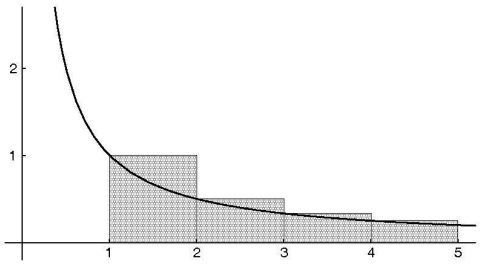

Fig. 2 Die untere Abschätzung

Betrachten wir die Rechtecke *unter* der Kurve (siehe Figur 3), so ergibt sich die Beziehung

$$S(n) - 1 \leq \int_1^{n} \frac{1}{x}\, dx = \log n \ .$$

Man hat also für $S(n)$ die Ungleichungen

$$\log(n+1) \leq S(n) \leq 1 + \log n \ ,$$

aus denen folgt, dass die "Kurve" in Figur 1 tatsächlich im wesentlichen die log-Kurve ist.

6. Wir wollen die letzte Abschätzung noch etwas näher betrachten. Zu diesem Zweck führen wir folgende Bezeichnung ein: Es sei r_m der Flächeninhalt des dreieckförmigen Bereichs zwischen dem Rechteck über dem Intervall $[m, m+1]$ und der Kurve $y = 1/x$. Dann gilt

$$S(n) = \log n + \left(1 - \sum_{1}^{n-1} r_m\right) .$$

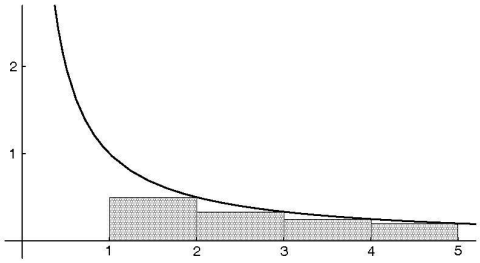

Fig. 3 Die obere Abschätzung

Die Reihe $\sum_1^\infty r_m$ hat nur positive Glieder. Durch Verschieben (siehe Figur 4) der dreiecksförmigen Flächenstücke in das durch den Punkt (1,1) gegebene Quadrat folgt

$$0 < \sum_{1}^{\infty} r_m < \frac{1}{2} .$$

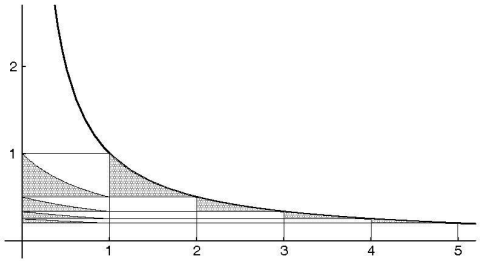

Fig. 4 Die Konvergenz von $\sum_1^\infty r_m$

Damit ist gezeigt, dass die Reihe $\sum_1^\infty r_m$ konvergiert und dass die Summe eine positive reelle Zahl zwischen 0 und 1/2 ist. In der Gleichung

$$S(n) = \log n + \left(1 - \sum_{1}^{n-1} r_m\right) ,$$

gilt im Grenzübergang $n \to \infty$ also $1/2 < 1 - \sum_1^\infty r_m < 1$.

Damit ist das Computerbild vollständig erklärt: $S(n)$ und $\log n$ unterscheiden sich für grosse n im wesentlichen nur um eine additive Konstante. Ausserdem hat die Überlegung auch über das Ausmass der Verschiebung Informationen geliefert: die Verschiebung ist für $n \to \infty$ gegeben durch $1 - \sum_1^\infty r_m$, also durch eine Zahl zwischen 1/2 und 1. Dieser Limes ist die berühmte *Eulersche Konstante*, sie wird üblicherweise mit γ bezeichnet:[8)]

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (S(n) - \log n) = 1 - \sum_1^\infty r_m \ .$$

Man würde natürlich nicht eine spezielle Bezeichnung für diese Zahl einführen, wenn sie nur im Zusammenhang mit der harmonischen Reihe vorkommen würde. Aber es hat sich seit Euler gezeigt, dass γ in sehr vielen mathematischen Problemen eine Schlüsselrolle spielt. Zum Beispiel tritt sie völlig überraschend an verschiedenen Stellen in der Zahlentheorie auf, so etwa bei der *Primzahlverteilung* und bei der *Gammafunktion*.[9)] Die arithmetische Natur der Zahl γ ist übrigens auch heute noch nicht geklärt: Man weiss nicht, ob γ irrational oder rational ist, auch wenn mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen ist, dass γ irrational ist.[10)] Selbst wenn man diese erste Frage beantworten könnte, bleiben andere offen: Ist γ algebraisch oder transzendent?

7. Ich will das einfache Resultat über den Zusammenhang von $S(n)$ und $\log n$ zum Anlass nehmen, um einige weitere Bemerkungen über die *Divergenz der harmonischen Reihe* zu machen. Diese Divergenz ist extrem langsam, und es ist instruktiv, an dieser Langsamkeit die Möglichkeiten des Computers zu testen. Zuerst einmal ist festzuhalten, dass beim naiven Rechnen auf dem Computer eigentlich jede Reihe "konvergiert", wenn nur die Reihenglieder gegen Null streben. Da nämlich der Computer nur endlich viele Zahlen darstellen kann, kennt er eine kleinste positive Zahl. Streben nun die Glieder einer Reihe gegen Null, so wird der Computer diese von einem gewissen Index an als Null ansehen; sie tragen also zur Reihensumme nichts mehr bei, und die Reihe erscheint als konvergent. Aber wir wollen hier einmal absehen von diesen technischen Begrenzungen und uns einen idealen Computer vorstellen, der mit beliebig kleinen positiven reellen

8) Die Konstante γ wird auch etwa nach Euler und Mascheroni benannt. Leonard Euler (1707–1783) studierte bei Johann Bernoulli an der Universität Basel. Bereits als 20jähriger ging er nach St. Petersburg und wurde dort 1731 Professor für Physik und ab 1733 für Mathematik. 1741 folgte er einem Ruf Friedrich II an die Akademie in Berlin. Nach dem Tode von Maupertuis im Jahre 1759 war Euler faktisch, wenn auch nicht nominell, der Leiter der Akademie. 1766 kehrte er nach St. Petersburg zurück, wo er – obschon erblindet – bis zu seinem Tod unermüdlich tätig war. – Lorenzo Mascheroni (1750–1800) wurde 1786 Professor für Mathematik in Pavia. Er ist berühmt für seine Studien über geometrische Konstruktionen mit dem Zirkel, also ohne Lineal, die er in seinem Napoleon gewidmeten Werk "La geometria del compasso" veröffentlichte. – Euler's erste Veröffentlichung über γ datiert aus dem Jahr 1734; Lorenzo Mascheroni hat sich 1790 mit γ beschäftigt. Euler hatte 15 Dezimalstellen für γ angegeben, Mascheroni 32. Es stellte sich allerdings später heraus, dass nur 19 davon richtig waren. Es ist deshalb wohl angebracht, wenn wir die Konstante nur nach Euler benennen.

9) Für Beispiele konsultiere man z.B. Conway, Guy [4], Dickson [5], Nunemacher [13].

10) J. Borwein (Dezember 1993) gibt 172′000 Stellen von γ an und folgert aus seinem Resultat, dass der Nenner von γ mehr als 60′000 Stellen besitzen muss, wenn γ rational ist. Diese Information ist unter http://www.mathsoft.com/asolve/constant/euler/euler.html zu finden.

Zahlen richtig umzugehen weiss. Wir haben im Bild gesehen, dass die Partialsumme $S(256)$ der harmonischen Reihe etwa 6 beträgt. Wieviele Glieder braucht es, um die Summe 10, 40, 100 zu erreichen? Dabei wollen wir uns mit groben Abschätzungen begnügen und die (ebenfalls interessante) Frage nach der *genauen* Anzahl der für die Summe notwendigen Glieder nicht betrachten.[11] Es sind nach unserem Resultat die Gleichungen

$$\log n = 10 - \gamma\,, \quad \log n = 40 - \gamma\,, \quad \log n = 100 - \gamma$$

zu lösen. Die Zahl n ist also in den drei Fällen approximativ durch

$$n \approx e^{10-\gamma}, \quad n \approx e^{40-\gamma}, \quad n \approx e^{100-\gamma}$$

gegeben. Man erhält (für $\gamma = 0.577218$):

$$n = 12'367\,, \quad n = 1.32 \cdot 10^{17}\,, \quad n = 1.50 \cdot 10^{43}\,.$$

Nehmen wir an, dass unser Computer pro Sekunde 1′000′000 reelle Zahlen (mit beliebiger Genauigkeit) addieren kann. Dann erhalten wir als approximativen Zeitbedarf der durchzuführenden Rechnungen

$$12 \text{ msec} \quad 4'190 \text{ Jahre} \quad 4.78 \cdot 10^{29} \text{ Jahre}$$

Das Beispiel ist instruktiv: Bereits im sehr einfachen Fall der harmonischen Reihe ist der Computer nicht in der Lage, den Resultaten der Mathematik wirklich gerecht zu werden. Und er wird es auch nie können, denn selbst der Einsatz eines Computers, der eine Million Mal schneller ist, bringt in dieser Richtung wenig.

8. Diese Überlegungen zeigen auch, dass für die numerische Berechnung von γ die Definition als Limes der Differenz von $S(n)$ und $\log n$ nicht günstig ist. Dies wird besonders deutlich, wenn man eine genauere Abschätzung durchführt. Die Berechnung von γ muss auf anderen Wegen erfolgen, und wir werden später zwei entsprechende Ideen von Euler eingehender beschreiben.

Für die Abschätzung benützen wir die bereits früher eingeführte Bezeichnung (vergleiche dazu Young [16]): Es ist r_m der Flächeninhalt des dreieckförmigen Bereichs zwischen dem Rechteck über dem Intervall $[m, m+1]$ und der Kurve $y = 1/x$. Dann erhalten wir

$$\gamma = 1 - \sum_{1}^{\infty} r_m = 1 - \sum_{m=1}^{n-1} r_m - \sum_{m=n}^{\infty} r_m = (S(n) - \log n) - \sum_{m=n}^{\infty} r_m\,.$$

Als Nächstes versuchen wir, r_m abzuschätzen. Aus der Figur 5 liest man ohne Schwierigkeiten ab:

$$r_m \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$$

11) Zu dieser Frage siehe z.B. Comtet [3], Newton [12], Young [16], Zemyan [17].

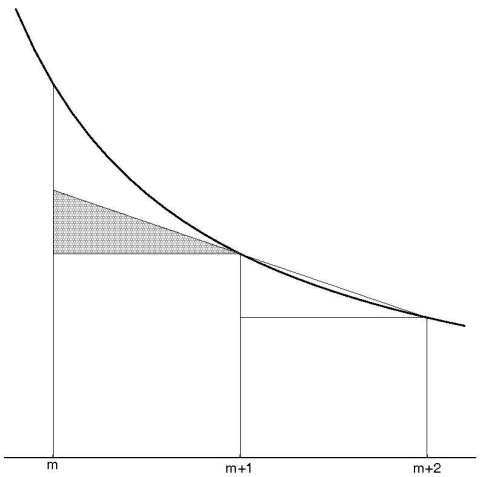

Fig. 5 Abschätzung für r_m

und damit ergibt sich, da man eine Teleskopfolge vor sich hat,

$$\sum_{m=n}^{\infty} r_m \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} .$$

Dies liefert eine Fehlerabschätzung für die Berechnung von γ aus der Gleichung

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(S(n) - \log n) = (S(n) - \log n) - \sum_{m=n}^{\infty} r_m .$$

Man erhält:

Um γ auf 10^{-l} genau zu berechnen, müssen mindestens 10^l Terme der harmonischen Reihe berücksichtigt werden.

Wegen dieser ausserordentlich langsamen Konvergenz ist die Folge $S(n) - \log n$ für die Berechnung von γ nicht geeignet.

9. Dass sich die direkte Definition für die Berechnung von γ nicht eignet, erkannte natürlich auch Euler. Er schlug deshalb 1734 das folgende Verfahren vor:[12)]

Man betrachte die übliche Potenzreihe des Logarithmus

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

12) De progressionibus harmonicis observationes, Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1734 et 1735. T. VII, 150–161. Siehe [8] Opera omnia, Series prima, Band XIV, p. 87–100

Setzt man $x = 1/k$, so erhält man

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{k} = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} - \cdots = \log(k+1) - \log k + \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} - \cdots .$$

Durch Summenbildung ergibt sich daraus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} - \cdots$$

oder

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \log(n+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4} - \cdots .$$

Im Grenzübergang erhält man γ als Limes einer rasch konvergierenden alternierenden Reihe; eine Fehlerabschätzung ist folglich trivial. Euler hat diese Methode verwendet, um γ auf 6 Stellen genau zu berechnen: $\gamma = 0.577218$. Es treten hier die Reihen der inversen Quadrate, Kuben etc.[13] auf, die in der Zahlentheorie als Werte der Zetafunktion und auch in der Geschichte der Mathematik eine grosse Rolle spielen.

10. Euler hat wenig später (1736) noch eine andere Methode angegeben, die noch effizienter ist.[14] Sie ist ebenfalls sehr interessant, denn sie führt auf die Formel von Euler-Maclaurin[15] und damit zu Techniken, die mit der *Numerischen Mathematik* in enger Verbindung stehen (siehe z.B. Henrici [11]).

Es geht um eine Summe der Form

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i) .$$

---

13) Zur Erinnerung:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \ldots$$

14) Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali. Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1736. T. VIII, 9–22. Siehe [8] Opera omnia, Series prima, Vol. XIV, p. 108–123

15) Colin Maclaurin (1698–1746) wurde 1675 auf Empfehlung von Newton Nachfolger von Gregory auf dem Lehrstuhl für Mathematik an der Universität in Edinburgh. Maclaurin hat die Formel 1742 in seinem zweibändigen Werk *A Treatise of Fluxions* veröffentlicht; Euler's erste Veröffentlichung darüber datiert von 1736. Bereits 1737 hatte Maclaurin die Formel aber Stirling mitgeteilt, der ihn auf entsprechende Resultate hinwies, die er brieflich von Euler erhalten hatte.

Mit Hilfe der Taylorentwicklung mit $x_0 = i$ und $x - x_0 = -1$ berechnen wir

$$f(i-1) = f(i) - \frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \cdots .$$

Summation ergibt dann

$$f(n) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) - \cdots .$$

Dies liefert einmal

$$\sum_{i=1}^{n} f'(i) = f(n) - f(0) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) - \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f'''(i) + \cdots \tag{1}$$

und – wenn man f' durch f ersetzt –

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} f'(i) - \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n} f''(i) + \cdots . \tag{2}$$

Mit Hilfe der Gleichung (1) und ihrer Ableitungen ersetzt man nun sukzessive die auf der rechten Seite der Gleichung (2) auftretenden Summen. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx &+ A_0(f(n) - f(0)) + A_1(f'(n) - f'(0)) \\ &+ A_2(f''(n) - f''(0)) + A_3(f'''(n) - f'''(0)) + \cdots .\end{aligned}$$

Die Koeffizienten lassen sich durch Ableiten und Einsetzen bestimmen. Es ergibt sich

$$A_0 = \frac{1}{2}\,, \quad A_1 = \frac{1}{12}\,, \quad A_2 = 0\,, \quad A_3 = -\frac{1}{720}\,, \ldots$$

Man erhält schliesslich die gewünschte Formel

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(n) \\ - f'(0)) - \frac{1}{720}(f'''(n) - f'''(0)) + \cdots .\end{aligned}$$

Bereits Euler hat die enge Verbindung bemerkt, die zwischen den hier auftretenden Koeffizienten und den – ganz anders definierten – Bernoullizahlen B_n besteht: Für $n \geq 2$ gilt $A_n = B_n/n!$.[16)]

16) Es gilt

$$B_0 = 1\,, \quad B_1 = -\frac{1}{2}\,, \quad B_2 = \frac{1}{6}\,, \quad B_3 = 0\,, \quad B_4 = -\frac{1}{30}\,, \quad B_5 = 0\,, \quad B_6 = \frac{1}{42}\,, \ldots$$

Wählt man $f(x) = (1+x)^{-1}$, so ergibt sich wegen $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n!)(1+x)^{-(n+1)}$ sofort

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} = \int_0^n \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\\ -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)\\ +\frac{3!}{720}\left(\frac{1}{(n+1)^4}-1\right)+\cdots .\end{aligned}$$

Die Addition von 1 auf beiden Seiten und die Ersetzung von $n+1$ durch n liefert schliesslich

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = C+\log n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4}\right)+\cdots .$$

Lässt man in dieser Formel n gegen unendlich streben, so ergibt sich sofort $C = \gamma$. Heutzutage kann man auch das Fehlerglied auf geschickte Weise ausdrücken; man schreibt:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \gamma+\log n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2kn^{2k}}+\theta_{m,n}\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}} .$$

Dabei bezeichnet B_n die n-te Bernoullizahl, und $\theta_{m,n}$ ist eine Zahl im Intervall $(0,1)$. Die Reihe, die hier entstanden ist, ist für festes n divergent, denn der absolute Betrag der Bernoullizahlen nimmt für grosse Indizes rasch zu. Hingegen lässt sich für festes m der Fehlerterm beliebig klein machen, wenn nur n genügend gross gewählt wird. Euler besass noch keine Beschreibung des Restgliedes, dieses wurde erst durch C.G.J. Jacobi [9] näher untersucht. Später hat W. Wirtinger [15] das Restglied mit Hilfe der Bernoulli-Polynome behandelt. Dies ist der Zugang, den man heute in Lehrbüchern beschreitet, um zur Euler-Maclaurin Formel zu gelangen. Auch ohne Kenntnis des Restglieds machte Euler von der Reihe Gebrauch und berechnete damit γ auf 16 Stellen genau, $\gamma = 0.577'215'664'901'532'5$. Dazu setzte er $n = 10$ und berücksichtigte Terme bis zur Ordnung $1/n^{14}$.[17)]

11. Natürlich erlaubt die genaue Kenntnis von γ, in einem zweiten Schritt die Partialsummen der harmonischen Reihe mit derselben Genauigkeit zu bestimmen. Auch dies hat Euler in der zitierten Schrift getan. Die gleichen Berechnungen treten interessanterweise auch in einem freundschaftlichen Wettstreit zwischen Euler und seinem ehemaligen Lehrer Johann Bernoulli auf. Dies geht aus einigen Briefen aus der Korrespondenz hervor, welche die beiden lebenslang führten und welche Zeugnis ablegt für ihre gegenseitige hohe Wertschätzung (siehe dazu [10]). Johann Bernoulli – damals bereits 73 Jahre alt – hatte seinem um 40 Jahre jüngeren Schüler Euler eine Reihen-Formel für die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe mitgeteilt. Euler antwortete freundlich und anerkennend; gleichzeitig äusserte er aber seine Zweifel über die Nützlichkeit von Bernoulli's

17) Für verschiedene weitere Berechnungsarten für γ vergleiche man Nunemacher [13].

Formel für grosse n und beschrieb anschliessend *seine* (die oben dargestellte) Methode. Er lieferte als Beispiel die Summe der ersten Million Glieder der harmonischen Reihe auf 17 Stellen genau: 14.392′726′722′865′723′29. Dadurch fühlte sich Johann Bernoulli offenbar herausgefordert, und er gab in seinem Antwortbrief eine "neue Methode", eine einfache Abschätzung an, um die Summe der ersten 10^7 und schliesslich der ersten 10^8 Glieder zu bestimmen. Hatte er nicht bemerkt, dass Euler's Idee auch dieses geliefert hätte?

Dank Der Autor dankt Herrn E.A. Fellmann für den wichtigen Hinweis auf die Arbeit [10] und Herrn R. Suter für die Herstellung der Mathematica-Figuren.

Literatur

[1] Jakob Bernoulli, Werke, Band 4. Birkhäuser 1993. Einleitung (André Weil), p. 45 ff (Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis, 1689), p. 191 (MS aus Nachlass).

[2] M. Cantor: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Band 3, Teubner 1901. 58–61, 88 ff, 660–668.

[3] L. Comtet: Solution of Problem 5346. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 209.

[4] J.H. Conway, R.K. Guy: The Book of Numbers. Springer Verlag, 1996.

[5] L.E. Dickson: History of the Theory of Numbers. Chelsea, 1952.

[6] W. Dunham: Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics. Wiley 1990. (The Bernoullis and the Harmonic Series, p. 195ff.)

[7] C.H. Edwards, Jr.: The Historical Development of the Calculus, Springer Verlag, 1979.

[8] L. Euler: Opera Omnia. Teubner, Orell Füssli, Birkhäuser.

[9] C.G.J. Jacobi: De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae. J. Reine und Angew. Math. (Crelle) 12 (1834), 263–272; Werke 6, p. 64–75.

[10] E.A. Fellmann: Über einige mathematische Sujets im Briefwechsel Leonhard Eulers mit Johann Bernoulli. Verh. Naturf. Ges. Basel 95 (1985), 139–160.

[11] P. Henrici: Elements of Numerical Analysis, Wiley 1972.

[12] R.H.C. Newton: An Integer Sequence from the Harmonic Series. Amer. Math. Monthly 83 (1976), 748–749.

[13] J. Nunemacher: On Computing Euler's Constant. Math. Mag. 85 (1992) 313–322.

[14] R. Reiff: Geschichte der unendlichen Reihen. Wiesbaden 1969, Dr. Martin Sändig. Nachdruck der ursprünglichen Ausgabe von 1889.

[15] W. Wirtinger: Einige Anwendungen der Euler-Maclaurin'schen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel. Acta Math. 26 (1902), 255–271.

[16] R.M. Young: Euler's Constant. The Mathematical Gazette 75 (1991), 187–190.

[17] S.M. Zemyan: On two Conjectures Concerning the Partial Sums of the Harmonic Series. Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 83–86.

Urs Stammbach
Mathematik
ETH-Zentrum
CH 8092 Zürich

Zusatz bei der Korrektur Nach einem Vortrag über das Thema der harmonischen Reihe an der *Universidad Pública de Navarra* in Pamplona teilten mir die Zuhörer zu meiner Überraschung mit, dass Nicole Oresme dort gut bekannt sei, es gebe an der Universität sogar einen Repräsentationsraum, der seinen Namen trage. Genauere Nachforschungen deckten Verbindungen zwischen Nicole Oresme und dem ehemaligen Königreich Navarra auf: Johanna I, Königin von Navarra, hatte 1284 König Philipp IV von Frankreich geheiratet. 1305 stiftete sie an der damals jungen Sorbonne das *Collège de Navarre*. Hier war Nicole Oresme von 1348 bis 1361 tätig, ab 1356 stand er dem Collège als *grand maître* (Rektor) vor. – Der Oresme-Raum an der *Universidad Pública de Navarra* befindet sich übrigens nicht im Gebäude, in dem die Mathematik untergebracht ist, sondern in demjenigen der Ökonomie. In der Geschichte der Ökonomie ist Oresme wegen seines *Tractatus de mutationibus monetarum* berühmt, den man als Beginn dieser Wissenschaft ansieht. Noch im 17. Jahrhundert war diese Schrift weit verbreitet und wurde mehrfach nachgedruckt (1605, 1609, 1618, 1654, 1671). – Wie eine nähere Beschäftigung mit seinen Schriften zeigt, verfügte Nicole Oresme über eine ausserordentlich vielseitige Begabung, die sich über alle Wissenschaftszweige erstreckte. Wie schon die hier erwähnten Beispiele aus dem Bereich der Mathematik und der Ökonomie vermuten lassen, war er seiner Zeit in vielem weit voraus. Zahlreiche weitere Beispiele ähnlicher Art aus den verschiedensten Gebieten liessen sich anfügen. Es muss erstaunen, dass er in der Wissenschaftsgeschichte nicht besser bekannt ist. Seine Begabungen waren aber nicht auf die Wissenschaften beschränkt: Nach seiner Tätigkeit am *Collège de Navarre* war Oresme in einer politisch schwierigen Zeit als Berater und Diplomat des Dauphins und nachmaligen Königs Karl II von Frankreich tätig; 1377 wurde er Bischof von Lisieux.