Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **54 (1999)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 54 (1999) 37 – 41
0013-6018/99/010037-5 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1999

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1999 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1141: Ein Schachbrett mit anfänglich lauter weissen Feldern wird mit schwarzer und weisser Farbe bemalt, indem man

- entweder eine ganze Zeile oder Spalte mit der gleichen Farbe übermalt (Regel 1)
- oder in einer Zeile oder Spalte alle Farben vertauscht, d.h. jedes schwarze Feld weiss und jedes weisse Feld schwarz übermalt (Regel 2).

Diese beiden Regeln dürfen beliebig oft in beliebiger Reihenfolge auf die Zeilen und Spalten angewandt werden.

Welche Farbmuster können so auf dem Brett entstehen?

Jon Florin, Chur, CH

Aufgabe 1142: Eine Verallgemeinerung der Logarithmusreihe: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist durch

$$F_n(x) = n! \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (k+n)}$$

eine für $|x| \leq 1$ definierte Funktion gegeben. Man zeige:

$$F_n(x) = -(x-1)^n \cdot \ln(1-x) + \sum_{j=1}^{n} (x-1)^{n-j} \cdot \frac{x^j}{j} \tag{1}$$

$$F_n(x) = -(x-1)^n \cdot \int_0^x \frac{t^n}{(t-1)^{n+1}}\, dt \tag{2}$$

$$h_n \cdot x^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot \frac{1}{j} \cdot \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot x^{n-j} \cdot (x-1)^j \tag{3}$$

Dabei bedeutet $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Renate Golombek, Marburg, D

Aufgabe 1143 (Die einfache dritte Aufgabe): Seien a, b, c und d komplexe Zahlen. Zeige, dass

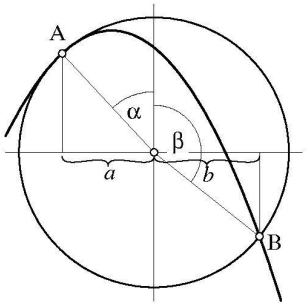
$$a^2 + 2bc + d^2 = a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + d\overline{d}$$

genau dann, wenn $a = \overline{a}, d = \overline{d}$ und $b = \overline{c}$.

Götz Trenkler, Dortmund, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 1998

Aufgabe 1129. Ein an einen Faden gebundener Stein rotiert in einer senkrechten Ebene (siehe Zeichnung). Bei ungenügender Geschwindigkeit verlässt er in einem Punkt A den Kreis und geht in eine Wurfparabel über (an dieser Stelle mit gleicher Krümmung). In einem Punkt B fällt der Stein dann wieder in den Kreis zurück. Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β?



Gerhard Wanner, Genève, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 24 Zuschriften eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Johannes M. Ebersold, (Winterthur, CH), Jon Florin (Chur, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Christian A. Meyer (Bern, CH), Hansklaus Rummler (Fribourg, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Kurt Schoisswohl (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Georg Unger (Dornach, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Teillösungen sandten Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH) und Jonathan Schaer (Calgary, Kanada).

Die meisten Einsender erstellen in einem der Situation gut angepassten Koordinatensystem die Gleichungen des Kreises und der Parabel und lösen anschliessend das Gleichungssystem unter Berücksichtigung der bekannten dreifachen Lösung, welche der Oskulation der beiden Kurven im Punkt A entspricht. Einige Einsender gewinnen die Kurvengleichungen mit physikalischen Überlegungen. Bei vielen Lösern verbleibt eine kleine Argumentationslücke, unterlassen sie es doch, den Schritt von $\sin(\beta) = \sin(3\alpha)$

zu $\beta = 3\alpha$ zu begründen. Mehrfach wird – um den Rechenaufwand erträglich zu halten – ein Computer-Algebra-System eingesetzt.

Die folgende (von der Redaktion leicht bearbeitete) Lösung stammt von *Roland Wyss:*

Wählt man als Koordinatenursprung den Parabelscheitel, so erhält man für die Parabel und den Kreis Gleichungen der Form:

$$y = \frac{k}{2} \cdot x^2 \quad (k < 0) \quad \text{und} \quad (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = \varrho^2.$$

Die Gleichung vierten Grades, die beim Lösen des Gleichungssystems für die Abszissen der gemeinsamen Punkte entsteht, ist x^3-frei. Deshalb folgt mit dem Satz von Vieta wegen des dreifachen Schnittes im Punkt A die Beziehung $-x_A - x_A - x_A - x_B = 0$, also

$$x_B = -3x_A \quad (\text{und} \quad y_B = \frac{9k}{2} \cdot x_A^2).$$

(Die Strecke AB wird also durch die Symmetrieachse der Wurfparabel geviertelt.) Im Punkt $A(x_A|y_A)$ hat man weiter $\tan(\alpha) = y'(x_A) = kx_A$, und mit $y''(x_A) = k$ liefern die bekannten Formeln für den Mittelpunkt M des Krümmungskreises

$$x_M = -k^2 x_A^3, \quad y_M = \frac{2 + 3k^2 x_A^2}{2k}.$$

Also wird

$$\tan(\beta) = \frac{x_M - x_B}{y_M - y_B} = \frac{3(kx_A) - (kx_A)^3}{1 - 3(kx_A)^2} = \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)} = \tan(3\alpha),$$

und die gefragte Beziehung lautet $\beta = 3\alpha + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$. Weil $0 \le \beta < 3\pi/2$ gelten muss, kommt für $\pi/6 < \alpha < \pi/3$ nur $n = 0$ in Frage, es gilt dann also $\beta = 3\alpha$. Für $0 \le \alpha < \pi/6$ wäre auch $\beta = 3\alpha + \pi$ trigonometrisch möglich, was bedeuten würde, dass der Schnittpunkt B auf dem unteren Halbkreis liegen müsste; es wäre also $y_M - y_B > 0$. Für $\pi/3 \le \alpha < \pi/2$ wäre auch $\beta = 3\alpha - \pi$ denkbar, der Punkt B läge auf dem oberen Halbkreis, und es müsste $y_M - y_B < 0$ gelten. Das Studium des Vorzeichens von $y_M - y_B$ schliesst aber diese Möglichkeiten aus:

$$y_M - y_B = \frac{1 - 3(kx_A)^2}{k} = \frac{1 - 3\tan^2(\alpha)}{k} \quad \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad 0 \le \alpha < \pi/6 \\ > 0 & \text{für} \quad \pi/3 \le \alpha < \pi/2 \end{cases}.$$

Somit lautet die gesuchte Beziehung: $\beta = 3\alpha$. (Dass sie auch im Fall $\alpha = \pi/6$, der in der obigen Rechnung ausgeschlossen werden muss, richtig ist, bestätigt man leicht.)

Aufgabe 1130. Die Menge $M_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1\}$ wird auf der Zahlengeraden um x Einheiten ($x \in \mathbb{N}$) nach rechts verschoben und auf die Menge $M_2 = \{1 + x, 3 + x, 5 + x, \ldots, 2n - 1 + x\}$ abgebildet. Ist es möglich, $x = x(n)$ so zu wählen, dass das Produkt aller Elemente von $M_1 \cup M_2$ für jedes n eine Quadratzahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Jon Florin (Chur, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Roland Kamber (Laupersdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), J.H. van Lint (Eindhoven, NL), Christian A. Meyer (Bern, CH), Jonathan Schaer (Calgary, Kanada), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Kurt Schoisswohl (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender finden durch Probieren die Funktion $x(n) = 2n+1$; einige wenige machen sich Gedanken, ob andere Werte für x möglich sind, kommen aber nur für kleine Werte von n zu Alternativen. Eine Mehrheit der Löser führt den Beweis induktiv. Im folgenden die Lösung nach *Peter Bundschuh*:

Die gestellte Frage ist mit "ja" zu beantworten; dies zeigt z.B. die Wahl $x = x(n) = 2n+1$. Denn dann ist $M_2 = \{2(n+1), 2(n+2), \ldots, 2(2n)\}$ zu M_1 disjunkt, und das Produkt aller Elemente von $M_1 \cup M_2$ ist gleich

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{2^n \cdot (2n)!}{n!} = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2,$$

also eine Quadratzahl, und das gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1131 (Die einfache dritte Aufgabe). Für welche natürlichen Zahlen n ist die Zahl

$$\underbrace{10101\ldots10101}_{2n+1 \text{ Ziffern}}$$

eine Primzahl?

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien-Herzegowina

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 25 Zuschriften eingegangen: Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Jon Florin (Chur, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Roland Kamber (Laupersdorf, CH), André Kiener (Oberdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), J.H. van Lint (Eindhoven, NL), Werner Raffke (Vechta, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Kurt Schoisswohl (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Eric Sparla (Stuttgart, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Ein Lösungsvorschlag war unvollständig.

Fast alle Löser geben für $n > 1$ explizit eine Zerlegung an, wobei meistens zwischen geradem und ungeradem n unterschieden wird. Einige Einsender haben die Aufgabe für beliebige Positionssysteme gelöst, so auch *Jany C. Binz*:

Im Zahlsystem zur Basis b ist

$$z = \sum_{k=0}^{n} (b^2)^k = \frac{(b^2)^{n+1} - 1}{b^2 - 1} = \frac{(b^{n+1} + 1)(b^{n+1} - 1)}{(b+1)(b-1)}.$$

Für $n \geq 2$ ist z zusammengesetzt, was folgende Zerlegungen bestätigen:

$$\begin{aligned} n = 2m: &\qquad z = \sum_{k=0}^{2m} b^k \cdot \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k b^k \\ n = 2m+1,\ m \geq 1: &\quad z = (b^{2m+2} + 1) \cdot \sum_{k=0}^{m} (b^2)^k \end{aligned}.$$

z kann somit höchstens für $n = 1$ eine Primzahl sein. Dies ist z.B. der Fall für die Basen $b = 2, 4, 6, \underline{10}, 14, 16, 20, \ldots$.

Klaus Zacharias weist darauf hin, dass diese Aufgabe als "quicky" Q665 im Mathematics Magazine Band 53, Heft 4 (1980) samt einer Lösung abgedruckt ist.