Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 55 (2000)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 55 (2000) 38 – 42
0013-6018/00/010038-5 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2000

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 2000 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

An diese Adresse sind auch Aufgabenvorschläge zu senden; momentan herrscht ein Mangel an neuen Aufgaben.

Aufgabe 1153: Die Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{nk}} \binom{2nk}{nk}, \quad n \in \mathbb{N}$$

besitzt für $n = 1, 2, 3, 4$ die Werte:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
s_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} \\
s_3 &= \frac{1}{6}(\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \\
s_4 &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\sqrt{1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Wie lautet s_n allgemein? Man finde einen geschlossenen Ausdruck.

Friedhelm Götze, Jena, D

Aufgabe 1154: Beweise: Die Fermatzahl $f_n = 2^{2^n} + 1$ ist genau dann zusammengesetzt, wenn es mindestens zwei natürliche Zahlen k gibt, für welche der Ausdruck

$$k^2 \cdot 2^{2n+2} + k - 2^{2^n - 2n - 4}$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Renate Golombek, Marburg, D

Aufgabe 1155 (Die einfache(?) dritte Aufgabe): Im gymnasialen Mathematikunterricht, der sich an nicht mathematisch-naturwissenschaftlich orientierte Schülerinnen und Schüler richtet, werden normalerweise die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen nicht behandelt, und auch auf Techniken wie partielles Integrieren oder Substituieren wird verzichtet.

Somit ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ zunächst nicht berechenbar. Interpretiert man aber das Integral als Flächeninhalt eines Viertelskreises, so erhält man sofort den Wert $\pi/4$.

Nun gilt aber auch

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Wie kann mit elementaren Mitteln und den oben erwähnten Defiziten dieses Ergebnis veranschaulicht und begreifbar gemacht werden?

Michael Vowe, Therwil, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 1999

Aufgabe 1141. Ein Schachbrett mit anfänglich lauter weissen Feldern wird mit schwarzer und weisser Farbe bemalt, indem man

- entweder eine ganze Zeile oder Spalte mit der gleichen Farbe übermalt (Regel 1)
- oder in einer Zeile oder Spalte alle Farben vertauscht, d.h. jedes schwarze Feld weiss und jedes weisse Feld schwarz übermalt (Regel 2).

Diese beiden Regeln dürfen beliebig oft in beliebiger Reihenfolge auf die Zeilen und Spalten angewandt werden.

Welche Farbmuster können so auf dem Brett entstehen?

Jon Florin, Chur, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Detlef Kaese (Neuss, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Philipp Zumstein (Lungern, CH). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Fast alle Löser beweisen, dass auf jedem $m \times n$–Brett jedes beliebige Farbmuster erzeugt werden kann. Die meisten argumentieren induktiv. Die einzelnen Darstellungen unterscheiden sich sehr im verwendeten Formalismus: einzelne liefern Prosaversionen, andere führen viele Definitionen ein, mit welchen sie danach einen zweizeiligen Beweis führen können. Wir folgen der Idee von *Fritz Siegerist:*

Auf jedem $m \times n$–Brett können alle Farbmuster entstehen, denn es gibt für jedes Feld (a,b) eine Folge von erlaubten Operationen, welche genau dieses Feld invertiert: Man invertiert (soweit nötig) jede Spalte, so dass die Zeile des zu invertierenden Feldes (a,b) ganz schwarz wird, mit Ausnahme dieses Feldes selber, welches weiss werden soll. Hierauf schwärzt man diese Zeile, was effektiv nur gerade das ausgewählte Feld (a,b)

invertiert. Anschliessend werden genau jene Spalten, welche vorher invertiert wurden, erneut invertiert.

Von den sechs in der Aufgabe zugelassenen Operationen (eine Zeile weiss bemalen, eine Zeile schwarz bemalen, eine Spalte weiss bemalen, eine Spalte schwarz bemalen, eine Zeile invertieren, eine Spalte invertieren) sind also nur deren zwei notwendig, um alle 2^{mn} Farbmuster zu schaffen.

Aufgabe 1142. Eine Verallgemeinerung der Logarithmusreihe: Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist durch

$$F_n(x) = n! \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+n}}{k(k+1)(k+2) \cdot \ldots \cdot (k+n)}$$

eine für $|x| \leq 1$ definierte Funktion gegeben. Man zeige:

$$F_n(x) = -(x-1)^n \cdot \ln(1-x) + \sum_{j=1}^{n} (x-1)^{n-j} \cdot \frac{x^j}{j} \tag{1}$$

$$F_n(x) = -(x-1)^n \cdot \int_0^x \frac{t^n}{(t-1)^{n+1}}\, dt \tag{2}$$

$$h_n \cdot x^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot \frac{1}{j} \cdot \binom{n}{j} \cdot x^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \cdot x^{n-j} \cdot (x-1)^j \tag{3}$$

Dabei bedeutet $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Renate Golombek, Marburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Daniel Neuenschwander (Lausanne, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL) 2 Lösungen, Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Wir betrachten zwei Lösungen, zuerst jene von *Daniel Neuenschwander:* Es bezeichnen $A_n(x)$ und $B_n(x)$ die rechten Seiten von (1) und von (2), $C_n(x)$ und $D_n(x)$ die rechte und die linke Seite von (3). Man verifiziert direkt die Rekursionsbeziehungen

$$\begin{aligned}
F'_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot F_n(x) \\
A'_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot A_n(x) \\
B'_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot B_n(x) \\
C'_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot C_n(x) + x^n \\
D'_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot D_n(x) + x^n
\end{aligned}$$

sowie die Verankerungen

$$F_1(x) = A_1(x) = B_1(x), \qquad C_1(x) = D_1(x)$$

und die Anfangswerte

$$F_n(0) = A_n(0) = B_n(0) = 0, \qquad C_n(0) = D_n(0) = 1.$$

Daraus folgen unmittelbar die drei Behauptungen.

Michael Vowe verwendet einen anderen Ansatz:

Nach der Formel von Taylor mit der Integraldarstellung für das Restglied gilt

$$\frac{x^{k+n}}{k(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+n)} = \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!}\cdot u^{k-1}du$$

und somit

$$F_n(x) = \int_0^x \left((x-u)^n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} u^{k-1}\right) du = \int_0^x \frac{(x-u)^n}{1-u}\, du$$

Mit der Substitution $u = (x-t)/(1-t)$ erhält man nach einfacher Rechnung (2). Mit der Substitution $t = z/(z-1)$ ergibt sich für das Integral aus (2)

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^n}{(t-1)^{n+1}}\, dt &= \int_0^{\frac{x}{x-1}} \frac{z^n}{1-z}\, dz \\
&= \int_0^{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{1}{1-z} - \sum_{j=0}^{n-1} z^j\right) dz \\
&= [-\ln(1-z)]_0^{\frac{x}{x-1}} - \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j}\right]_0^{\frac{x}{x-1}} \\
&= \ln(1-x) - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^j \cdot \frac{1}{j}
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch den Faktor $-(x-1)^n$, so hat man Behauptung (1) bewiesen.

Zum Beweis der Behauptung (3) betrachten wir die Funktion f mit

$$f(y) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \cdot \frac{1}{j} \cdot \binom{n}{j} \cdot y^j$$

Es gilt $f(0) = 0$. Wegen $1 + yf'(y) = (1-y)^n$ wird

$$f'(y) = \frac{(1-y)^n - 1}{y} = -\sum_{j=1}^{n} (1-y)^{j-1},$$

also $f(y) = C + \sum_{j=1}^{n} (1-y)^j \cdot \frac{1}{j}$. Weil aber $f(0) = 0 = C + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ ist, wird die Integrationskonstante $C = -h_n$. Mit der Substitution $x = 1/y$ und nach Multiplikation mit x^n ergibt sich Behauptung (3).

Aufgabe 1143 (Die einfache dritte Aufgabe). Seien a, b, c und d komplexe Zahlen. Zeige, dass

$$a^2 + 2bc + d^2 = a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + d\overline{d}$$

genau dann, wenn $a = \overline{a}, d = \overline{d}$ und $b = \overline{c}$.

Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 18 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien-Herzegowina), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Jürgen Lorenz (Leipzig, D), Ignace Morand (Lausanne, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) 2 Lösungen. Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Ein Grossteil der Einsender setzt die Zahlen in der Normalform $\mu + i\nu$ an. Weil $a^2 + 2bc + d^2$ reell ist, folgt dann nach kurzer Rechnung

$$2\nu_1^2 + 2\nu_4^2 + (\mu_2 - \mu_3)^2 + (\nu_2 + \nu_3)^2 = 0$$

und somit $\nu_1 = \nu_4 = \mu_2 - \mu_3 = \nu_2 + \nu_3 = 0$.

Wir geben noch die Lösung von *Jany C. Binz* wieder:

Wir schreiben die gegebene und die zu ihr konjugierte Gleichung in der Form

$$a(a - \overline{a}) + d(d - \overline{d}) = b(\overline{b} - c) - c(b - \overline{c})$$
$$\overline{a}(a - \overline{a}) + \overline{d}(d - \overline{d}) = \overline{c}(\overline{b} - c) - \overline{b}(b - \overline{c})$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt zuerst

$$(a - \overline{a})^2 + (d - \overline{d})^2 = 2(b - \overline{c})(\overline{b} - c)$$

und schliesslich

$$-2[(\Im a)^2 + (\Im d)^2] = |b - \overline{c}|^2.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn beide Seiten verschwinden, also wenn $b = \overline{c}$ und $\Im a = \Im d = 0$, also wenn $a = \overline{a}$ und $d = \overline{d}$. Die andere Richtung der behaupteten Äquivalenz ist trivial.