Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 56 (2001)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 56 (2001) 38 – 43
0013-6018/01/010038-6 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2001

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 2001 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1165: Wir vergleichen die Volumina folgender koaxialer Drehkörper:

a) Zusammensetzung zweier Drehkegel mit Spitzen in $N(0,0,1)$ resp. in $S(0,0,-1)$ und dem Kreis $k : x^2 + y^2 = 1, z = 0$ als gemeinsamer Grundfläche,

b) Umkugel von a),

c) Umzylinder von b),

d) Umhyperboloid (mit gleichseitiger Hyperbel als Meridian) von c),

e) Umzylinder von d).

Beim Vergleich der Resultate stellen wir eine störende Lücke fest. Gesucht ist ein schöner Lückenbüsser.

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Aufgabe 1166: $W_{m,n}$ sei die Menge aller minimalen Gitterwege w, die im ebenen Gitter von $(0,0)$ nach (m,n) führen $(m,n \geq 1)$; ferner bezeichne $z(w)$ die Anzahl der Ecken $(\lrcorner, \ulcorner)$ des Wegs w. Man bestimme $a(m,n) = \sum_{w \in W_{m,n}} z(w)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1167 (Die einfache dritte Aufgabe): Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s(j) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (\alpha N + \beta k)^j.$$

Man bestimme die Werte von $s(j)$ für $0 \leq j \leq N$.

Walther Janous, Innsbruck, A

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2000

Aufgabe 1153. Die Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{nk}} \binom{2nk}{nk}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

besitzt für $n = 1, 2, 3, 4$ die Werte:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
s_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}} \\
s_3 &= \frac{1}{6}(\sqrt{2}+2\sqrt{3}) \\
s_4 &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\sqrt{1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Wie lautet s_n allgemein? Man finde einen geschlossenen Ausdruck.

Friedhelm Götze, Jena, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Daniel Neuenschwander (Lausanne, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Hans-Jürgen Seiffert und Paul Streckeisen gehen von bekannten Integralwerten wie

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}$$

aus und finden nach Variablensubstitutionen die Beziehung

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)^{n-1}}{1+(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Auswertung mit Hilfe des Residuensatzes führt sie zu

$$s_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1-(-1)^n}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \sqrt{1+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}}\right).$$

Die übrigen Löser gehen vor wie *Peter Bundschuh*, wobei die Konvergenzfragen mit unterschiedlicher Ausführlichkeit geklärt werden:

Mit $f(z) := (1-4z)^{-1/2}$, wo der Hauptwert der komplexen Quadratwurzel genommen sei, gilt in $|z| < 1/4$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} z^j.$$

Aus der wohlbekannten Formel

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi i j\nu/n} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n|j \\ 0 & \text{falls} \quad n\nmid j \end{cases}$$

ergibt sich für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1/4$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f(xe^{2\pi i\nu/n}) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi i j\nu/n}\right) x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2nk}{nk} x^{nk}.$$

Da die rechts stehende Reihe für $x = \frac{1}{4}e^{i\pi/n}$ mit der vorgegebenen, nach dem Leibnizkriterium konvergenten, unendlichen Reihe übereinstimmt, gilt nach dem Abelschen Stetigkeitssatz und der Definition von f

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} (1 - e^{(2\nu+1)\pi i/n})^{-1/2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Je nach Geschmack kann man das noch auf die reelle Form

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\cos((n-1-2\nu)\pi/4n)}{\sqrt{2\sin((2\nu+1)\pi/2n)}}$$

oder

$$s_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1-(-1)^n}{2\sqrt{2}} + 2\sum_{\nu=0}^{[\frac{n-2}{2}]} \frac{\cos((n-1-2\nu)\pi/4n)}{\sqrt{2\sin((2\nu+1)\pi/2n)}}\right)$$

bringen.

Aufgabe 1154. Beweise: Die Fermatzahl $f_n = 2^{2^n} + 1$ ist genau dann zusammengesetzt, wenn es mindestens zwei natürliche Zahlen k gibt, für welche der Ausdruck

$$k^2 \cdot 2^{2n+2} + k - 2^{2^n - 2n - 4}$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Renate Golombek, Marburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D).

Wir betrachten die Lösung von *Walther Janous*: Zunächst ist 2^{2^n-2n-4} genau dann eine natürliche Zahl, wenn $n \geq 4$ gilt; weil f_n für $n = 0, 1, 2, 3$ Primzahl ist und $k^2 \cdot 2^{2n+2} + k - 2^{2^n-2n-4}$ für diese n nicht einmal ganz ist, ist die Behauptung für $n \leq 3$ korrekt, und es kann ab sofort $n \geq 4$ vorausgesetzt werden. Zu studieren ist für natürliche Zahlen k und A die Gleichung

$$\begin{aligned} k^2 \cdot 2^{2n+2} + k - 2^{2^n-2n-4} &= A^2 \\ k^2 \cdot 2^{4n+6} + 2k \cdot 2^{2n+3} - 2^{2^n} &= (2^{n+2} \cdot A)^2 \\ (k \cdot 2^{2n+3} + 1)^2 - f_n &= (2^{n+2} \cdot A)^2 \\ (k \cdot 2^{2n+3} + 1 - 2^{n+2} \cdot A) \cdot (k \cdot 2^{2n+3} + 1 + 2^{n+2} \cdot A) &= f_n \qquad (1) \end{aligned}$$

Man sieht, (indem man $1 \cdot f_n = f_n$ setzt), dass $(k_0, A_0) = (2^{2^n-2n-4}, 2^{2^n-n-3})$ immer Lösung von (1) ist und dass dies die einzige Lösung ist, welche auf die triviale Zerlegung von f_n führt. Damit ist klar, dass, wenn (1) mehr als eine Lösung hat, f_n zusammengesetzt ist.

Es sei nun f_n zusammengesetzt. Dann gibt es nach einem Satz von Lucas (siehe [1]) natürliche Zahlen λ und μ mit $\lambda < \mu$, so dass

$$f_n = (2^{n+2} \cdot \lambda + 1) \cdot (2^{n+2} \cdot \mu + 1)$$

oder gleichwertig

$$\lambda + \mu = 2^{n+2}(2^{2^n-2n-4} - \lambda\mu). \qquad (2)$$

Wir zeigen nun, dass sich aus diesen Zahlen λ und μ eine weitere Lösung von (1) gewinnen lässt. Dazu studieren wir das Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} 2^{n+2} \cdot \lambda + 1 &= k \cdot 2^{2n+3} + 1 - 2^{n+2} \cdot A \\ 2^{n+2} \cdot \mu + 1 &= k \cdot 2^{2n+3} + 1 + 2^{n+2} \cdot A \end{aligned} \right|,$$

welches die rationale Lösung $(k_1, A_1) = (\frac{\lambda+\mu}{2^{n+2}}, \frac{\mu-\lambda}{2})$ besitzt. Sowohl k_1 als auch A_1 sind ganzzahlig: Aus (2) folgt zunächst, dass $\lambda + \mu$ durch 2^{n+2} teilbar ist, also k_1 ganzzahlig ist. Weil die Summe $\lambda + \mu$ gerade ist, ist es auch die Differenz $\mu - \lambda$, was die Ganzzahligkeit von A_1 sicherstellt. Man bestätigt leicht, dass für $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ diese Lösung von (k_0, A_0) verschieden ist.

Literatur

[1] P. Bundschuh, Einführung in die Zahlentheorie, 4. Aufl., Springer-Verlag, 1998, p. 140.

1155 (Die einfache(?) dritte Aufgabe). Im gymnasialen Mathematikunterricht, der sich an nicht mathematisch-naturwissenschaftlich orientierte Schülerinnen und Schüler richtet, werden normalerweise die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen nicht behandelt, und auch auf Techniken wie partielles Integrieren oder Substituieren wird verzichtet.

Somit ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ zunächst nicht berechenbar. Interpretiert man aber das Integral als Flächeninhalt eines Viertelskreises, so erhält man sofort den Wert $\pi/4$.

Nun gilt aber auch

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Wie kann mit elementaren Mitteln und den oben erwähnten Defiziten dieses Ergebnis veranschaulicht und begreifbar gemacht werden?

Michael Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Zuschriften eingegangen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH).

Eine einfache Lösung stammt von *Frieder Grupp*: Wir wenden die den Schülerinnen und Schülern bekannte Kettenregel

$$f(u(x))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

auf die folgende Situation an:

$$f(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad u(x) = \tan(x).$$

Für die Ableitung von $f(\tan(x))$ ergibt sich demnach

$$f'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} \cdot (1+\tan^2(x)) = 1,$$

und somit ist $f(\tan(x)) = x+c$ für eine Konstante c, die wegen $f(\tan(0)) = 0$ verschwinden muss. Aus $f(\tan(x)) = x$ folgt für $x = \pi/4$ das gewünschte Resultat $f(1) = \pi/4$.

Walter Burgherr argumentiert wie folgt: Bezeichnen $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $X(x,0)$ und $Y(x+\Delta x, 0)$ Punkte in einem orthonormierten kartesischen Koordinatensystem, so wird durch die Integralfunktion $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ der Winkel $\alpha(x) = \angle OBX$ dargestellt. Es gilt nämlich

1. $\alpha(0) = \angle OBO = 0$
2. Die Fläche des Dreiecks XYB lässt sich auf zwei elementare Arten berechnen, und der Flächenvergleich liefert $\Delta x/2 = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}\sin(\Delta\alpha)/2$, woraus

$$\frac{\sin(\Delta\alpha)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}}$$

folgt.

3. $$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\sin(\Delta\alpha)} \cdot \frac{\sin(\Delta\alpha)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\sin(\Delta\alpha)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Aus $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \alpha(x)$ ergibt sich speziell $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \alpha(1) = \angle OBA = \pi/4$.

Joachim Klose betrachtet den Kreis mit Zentrum $(0,1)$, der die Gerade durch den Ursprung mit Steigung x berührt. Der Radius ϱ dieses Kreises erweist sich als $\varrho = 1/\sqrt{1+x^2}$, so dass sich das gesuchte Integral als $\int_0^1 \varrho^2(x)\,\mathrm{d}x$ deuten lässt. Mit zwar elementaren, aber aufwendigen Überlegungen führt er dieses Integral über in das Integral $\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen der positiven Abszissenachse und der zur Steigung x gehörigen Geraden ist. Damit hat er auf geometrischen Weg die Substitution $x = \tan(\varphi)$ durchgeführt.

Beat Schweingruber fasst den Integranden als Summe einer nichtabbrechenden geometrischen Reihe auf und integriert summandenweise. Durch Abschätzungen macht er plausibel, dass die entstehende Reihe gegen einen Wert in der Nähe von $\pi/4$ konvergiert.