Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **57 (2002)**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 57 (2002) 174 – 178
0013-6018/02/040174-5

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 2003 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1187: Es sei n die grösste Zahl der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m < 2002 \ \wedge \ 5 \nmid \binom{2m}{m}\}$. Welchen Rest lässt $\binom{2n}{n}$ bei der Division durch 5?

Ernst Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1188: Wir betrachten jene Vierflache (mit nicht verschwindendem Volumen), bei welchen die Summe der Abstände zu den vier Seitenflächen für alle inneren Punkte gleich gross ist. Beweise, dass genau die Tetraeder mit lauter zueinander kongruenten Seitenflächen mit spitzen Winkeln diese Eigenschaft haben und dass gegenüberliegende Kanten gleich lang sind.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1189 (Die einfache dritte Aufgabe): Bestimme x aus der Gleichung

$$19[x] + 99\{x\} = 1999.$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die Gaußklammer, und $\{x\}$ ist der Nachkommaanteil von x.

Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2001

Aufgabe 1174. Wir betrachten Folgen von k (> 2) aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$n, n+1, n+2, \ldots, n+k-2, n+k-1.$$

In den meisten derartigen Folgen gibt es mindestens eine Zahl, die zu allen anderen Zahlen der Folge teilerfremd ist. Man finde die kleinste Folge (d.h. $n \cdot k$ minimal), in der es keine Zahl gibt, die zu allen anderen Zahlen der Folge teilerfremd ist.

Peter Hohler, Aarburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Die eingesandten Lösungen, welche nicht alle korrekt waren, unterscheiden sich vor allem im „Mass des experimentellen Anteils". Wir folgen der Lösung von *Jany C. Binz*: Von 30 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen enthalten genau deren 8 keinen der Primteiler 2, 3 und 5. Ist m ein Vielfaches von 30, so sind diese Lücken bei $m \pm 29$, $m \pm 23$, $m \pm 19$, $m \pm 17$, $m \pm 13$, $m \pm 11$, $m \pm 7$ und $m \pm 1$. Es gilt nun, möglichst wenige aufeinanderfolgende Lücken mit möglichst wenigen Primteilern aus $\{7, 11, 13, 17, \ldots\}$ so zu belegen, dass in k aufeinanderfolgenden Zahlen diese ausgewählten Primteiler mindestens paarweise auftreten. Mit 7 und 11 allein ist dies offensichtlich nicht möglich, da stets eine Lücke frei bleibt.

Mit 7, 11 und 13 findet man zwei Belegungen, nämlich

$$B_1 = \begin{pmatrix} m-1 & m+1 & m+7 \\ 11 & 7 & 13 \end{pmatrix} \text{ und } B_2 = \begin{pmatrix} m-7 & m-1 & m+1 \\ 13 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Beide führen auf Sequenzen der Länge $k = 17$ mit der gewünschten Eigenschaft. B_1 erzeugt die Folge $m-6$, $m-5$, …, $m+10$, und B_2 erzeugt $m-10$, $m-9$, …, $m+6$. Die beiden Situationen führen auf die diophantischen Gleichungssysteme

$$\left| \begin{array}{r} m_1 = 30x_1 \\ m_1 - 1 = 11y_1 \\ m_1 + 1 = 7z_1 \\ m_1 + 7 = 13w_1 \end{array} \right| \quad \text{und} \quad \left| \begin{array}{r} m_2 = 30x_2 \\ m_2 - 7 = 13y_2 \\ m_2 - 1 = 7z_2 \\ m_2 + 1 = 11w_2 \end{array} \right|.$$

Weil 30, 7, 11 und 13 paarweise teilerfremd sind, haben die Systeme nach dem Chinesischen Restsatz unendlich viele Lösungen. Mit Standardmethoden erhält man im ersten Fall $x_1 = 73 + 1001\lambda$ $(\lambda \geq 0)$ und damit $m_1 = 2190$ und $n_1 = 2184$. Für das zweite System ergibt sich $x_2 = 928 + 1001\lambda$ $(\lambda \geq 0)$, also $m_2 = 27840$ und $n_2 = 27830$.

Bei jeder anderen Belegung der Lücken mit Primzahlen werden k und m grösser. Somit ist 2184, 2185, …, 2200 die gesuchte minimale Sequenz.

Aufgabe 1175. Für $n \in \mathbb{N}$ und $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^i}\right)$. Man beweise oder widerlege die Behauptung: Zu jedem n gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten a_j $(j = 2n, 2n+1, \ldots, 2^n)$ und b_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, so dass

$$1 + \frac{1}{p_n(x)} \cdot \sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1-x)^{j-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{1 + x^{2^k}}.$$

Friedhelm Götze, Jena, D

Leider ist zu dieser Aufgabe keine Lösung eingegangen; weil auch die Einsendung des Autors keine vollständige Lösung enthält, publizieren wir eine Teillösung des Aufgabenredaktors in der Hoffnung, ein Leser könne die Lösung vervollständigen: Multiplikation der Ausgangsgleichung mit $p_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1+x^{2^i}\right) = \sum_{\ell=0}^{2^n-1} x^\ell$ liefert

$$\sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1-x)^{j-1} \equiv -\sum_{\ell=0}^{2^n-1} x^\ell + \left(\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+x^{2^i}\right)\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{1+x^{2^k}},$$

wobei nach Kürzen die rechte Seite die Form $\sum_{\ell=0}^{2^n-1} c_\ell x^\ell$ aufweist, in welcher jeder der 2^n Koeffizienten c_ℓ eine Summe der Art $-1+\sum_{j=0}^{n-1}\epsilon_j \cdot b_j$ $(\epsilon_j \in \{0,1\})$ ist und alle Koeffizienten voneinander verschieden sind. Der Vergleich mit der linken Seite legt nahe, dieses Polynom nach Potenzen von $x-1$ umzuordnen. Für die Koeffizienten d_j in $\sum_{j=0}^{2^n-1} d_j(x-1)^j$ erhält man nach heiklen kombinatorischen Überlegungen

$$d_j = -\binom{2^n}{j+1} + \sum_{s=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{2^{n-s}-1} (-1)^{k+1}\binom{k\cdot 2^s}{j+1}\right)}_{(*)} \cdot b_s \qquad (0 \le j \le 2^n-1).$$

Der Vergleich mit der linken Seite zeigt, dass die Koeffizienten d_j für $j = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2$ verschwinden müssen. Dies führt für die n Unbekannten $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ auf ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit $2n-1$ Gleichungen, dessen Lösbarkeit zu untersuchen ist.

Für kleine Werte von j lassen sich die Summen $(*)$ und damit die Koeffizienten des Gleichungssystems berechnen. Es entsteht folgendes System:

$$\left|\begin{array}{rcl}
2^{n-1}\sum_{s=0}^{n-1} \cdot b_s &=& 2^n \\
2^{n-2}\sum_{s=0}^{n-1}(2^n-2^s-1)\cdot b_s &=& \binom{2^n}{2} \\
\frac{1}{3}\cdot 2^{n-2}\cdot(2^{n-1}-1)\sum_{s=0}^{n-1}(2^{n+1}-3\cdot 2^s-2)\cdot b_s &=& \binom{2^n}{3} \\
\vdots &=& \binom{2^n}{4} \\
\vdots &=& \binom{2^n}{5} \\
\vdots &=& \vdots \\
\vdots &=& \binom{2^n}{2n-1}
\end{array}\right| .$$

Die erste Gleichung (also die aus dem Fall $j = 0$ entstandene) lässt sich zu $\sum_{s=0}^{n-1} b_s = 2$ vereinfachen. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung vereinfacht sich die zweite Gleichung zu $\sum_{s=0}^{n-1} 2^s \cdot b_s = 0$. Man rechnet leicht nach, dass die dritte Gleichung nun automatisch erfüllt ist. Es scheint so – aber der Nachweis ist dem Aufgabenredaktor nicht gelungen – dass die $n-1$ Gleichungen 3, 5, ..., $2n-1$ jeweils Linearkombination der vorigen Gleichungen und deshalb überflüssig sind. Es bleiben also n Gleichungen übrig. Vermutlich lässt sich das reduzierte System wie folgt schreiben:

$$\left|\begin{array}{r} \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} \cdot b_s = 2 \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} 2^s \cdot b_s = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} 2^{3s} \cdot b_s = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} 2^{5s} \cdot b_s = 0 \\ \vdots \qquad\qquad = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} 2^{(2n-3)s} \cdot b_s = 0 \end{array}\right| .$$

Da dieses System regulär ist, sind die b_s $(0 \leq s \leq n-1)$ eindeutig bestimmt, und die a_j $(2n \leq j \leq 2^n)$ lassen sich dann durch Fortführung des Koeffizientenvergleiches eindeutig bestimmen.

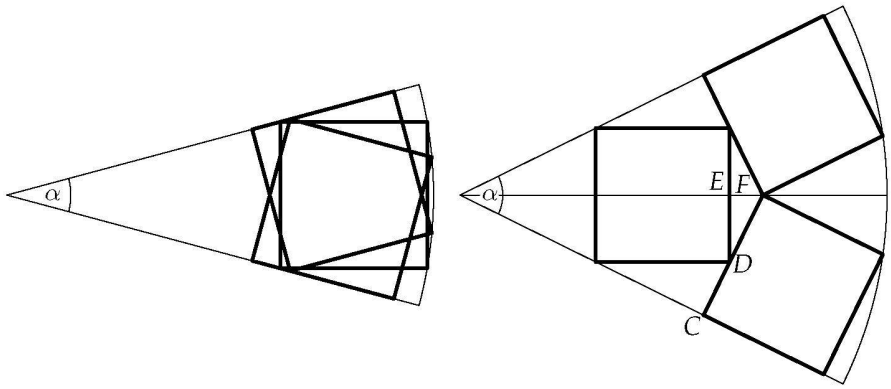
Aufgabe 1176 (Die einfache dritte Aufgabe). Welchen (spitzen) Zentriwinkel hat ein Kreissektor, wenn sich diesem drei kongruente Quadrate einbeschreiben lassen?

Fritz Siegerist, Meilen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingegangen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Nicht alle Einsender haben das Wort „einbeschreiben“ auf die gleiche Art interpretiert. Die meisten beziehen sich auf eine der beiden in den Figuren skizzierten Situationen.

Bernhard Ruh behandelt die erste Situation: Bezeichnet α den Zentriwinkel des Sektors (Radius 1) und gilt $x = \tan(\alpha/2)$ resp. $y = \tan(\alpha)$, so berechnet sich die Seitenlänge des Quadrates, welches zwei Ecken auf dem Bogen hat, zu $a = \dfrac{2x}{\sqrt{5x^2 + 4x + 1}}$, jene



der beiden anderen Quadrate zu $a = \dfrac{y}{\sqrt{2y^2+2y+1}}$. Mit der Doppelwinkelformel $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ findet man durch Gleichsetzen $x^2 - 4x + 1 = 0$ mit der einzigen brauchbaren Lösung $x = 2 - \sqrt{3}$. Daraus folgt $\alpha/2 = \pi/12$, und der gesuchte Zentriwinkel misst also $\alpha = \pi/6$.

Johannes Ebersold bezeichnet in der rechten Figur die Seite des symmetrisch im Sektor liegenden Quadrates mit s. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{CD} &= s \cdot \sin(\alpha/2),\\
\overline{DF} &= s - \overline{CD} = s \cdot (1 - \sin(\alpha/2)),\\
\overline{DE} &= \overline{DF} \cdot \cos(\alpha/2) = s \cdot (1 - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)).
\end{aligned}$$

Weil aber $2 \cdot \overline{DE} = s$, hat man für α die Bestimmungsgleichung $2\cos(\alpha/2)(1 - \sin(\alpha/2)) = 1$. Für α ergibt sich näherungsweise $52.52°$.