Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **57 (2002)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 57 (2002) 38 – 42
0013-6018/02/010038-5 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2002

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 2002 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

An diese Adresse sind auch Aufgabenvorschläge zu senden; momentan herrscht ein Mangel an neuen Aufgaben.

Aufgabe 1178: Jedes der $m \cdot n$ Einheitsquadrate eines $m \times n$-Rechtecks wird schwarz oder weiss gefärbt. Zwei Färbungen gelten als äquivalent, wenn sie durch Achsen- oder Punktspiegelung oder durch Farbentausch auseinander hervorgehen. Man bestimme die Anzahl der verschiedenen Muster (Äquivalenzklassen).

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1179: ℓ Gefässe sind kreisförmig aufgestellt; eines enthält V_1 Liter Alkohol, die übrigen enthalten $V_2, V_3, \ldots, V_\ell$ Liter Wasser. Beginnend mit dem Alkohol enthaltenden Gefäss werden nun mit einem Löffel a Liter Flüssigkeit ($a \leq V_1$) reihum von einem Gefäss ins nächste geleert, wobei jeweils gut umgerührt wird. Dieser Umfüllprozess wird beliebig fortgesetzt. Wie wird sich der Alkohol langfristig auf die ℓ Gefässe verteilen?

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Aufgabe 1180 (Die einfache dritte Aufgabe): Es seien H der Höhenschnittpunkt und M_b der Mittelpunkt der Seite AC im Dreieck ABC. Die durch H gehende Normale der Geraden HM_b schneide die Seiten AB in E und BC in F. Zeige, dass H die Strecke EF halbiert.

Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2001

Aufgabe 1165. Wir vergleichen die Volumina folgender koaxialer Drehkörper:

a) Zusammensetzung zweier Drehkegel mit Spitzen in $N(0,0,1)$ resp. in $S(0,0,-1)$ und dem Kreis $k: x^2+y^2=1, z=0$ als gemeinsamer Grundfläche,

b) Umkugel von a),

c) Umzylinder von b),

d) Umhyperboloid (mit gleichseitiger Hyperbel als Meridian) von c),

e) Umzylinder von d).

Beim Vergleich der Resultate stellen wir eine störende Lücke fest. Gesucht ist ein schöner Lückenbüsser.

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Paul Frischknecht (Guntershausen, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da die Volumina $V_a = 2\pi/3$, $V_b = 4\pi/3$, $V_c = 6\pi/3$, $V_d = 8\pi/3$ und $V_e = 12\pi/3$ betragen, ist ein schöner Körper vom Volumen $V = 10\pi/3$ zu finden, der das Hyperboloid d) umhüllt und im Zylinder e) eingeschlossen ist. Alle unten erwähnten Körper haben die z-Achse als gemeinsame Achse, und durch Gleichungen beschriebene Meridiankurven sollen in der Ebene $y = 0$ liegen. Der Mantel des Hyperboloids d) wird dann erzeugt durch Rotation des in $|z| \leq 1$ gelegenen Teils der Hyperbel $x^2 - z^2 = 1$ um die z-Achse, und der Mantel des Zylinders e) kann durch $x^2 + y^2 = 2$ $(|z| \leq 1)$ beschrieben werden.

Unsere Leser bieten die folgenden Lückenbüsser an:

- Das Hyperboloid, das durch Rotation des im Bereich $|z| \leq 1$ liegenden Teils der Hyperbel $2x^2 - z^2 = 3$ um die z-Achse erzeugt wird. (*W. Burgherr, A. Calame, F. Götze, W. Janous, V. Schindler, F. Sigrist*)
- Das Paraboloid, das durch Rotation des im Bereich $|z| \leq 1$ liegenden Teils der Parabel
$$z^2 = \frac{x - x_0}{\sqrt{2} - x_0} \qquad \left(x_0 = \frac{\sqrt{20} - 1}{\sqrt{8}} \approx 1.2276\right)$$
um die z-Achse erzeugt wird. (*P. Bundschuh, V. Schindler*)
- Die Zusammensetzung der beiden Kegelstümpfe mit gemeinsamer in der (x, y)-Ebene liegender Grundfläche $x^2 + y^2 = 4 - \sqrt{7}$, welche als Deckflächen die beiden auf den Höhen $z = \pm 1$ liegenden Kreise $x^2 + y^2 = 2$ besitzen. (*M. Vowe*)
- Die Zusammensetzung der beiden zur (x, y)-Ebene symmetrisch liegenden Kugelschichten, deren obere durch die Gleichung $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 2 \quad (0 \leq z \leq 1)$ gegeben ist. (*F. Grupp, P. Frischknecht, D. Kaese, R. Wyss*)
- Durch Rotation der Kurve mit der Gleichung $z^2 = (x^2 - 1)^4$ $(1 \leq x \leq \sqrt{2})$ um die z-Achse wird ein (namenloser) Körper mit den gewünschten Eigenschaften erzeugt. (*F. Götze*)
- Durch Rotation der Kurve mit der Gleichung
$$z^2 = \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha} \qquad (|z| \leq 1)$$
um die z-Achse erhält man für $\alpha = 9 - 6\sqrt{2} + \sqrt{169 - 108\sqrt{2}}$ einen Körper mit den gewünschten Eigenschaften. (*F. Götze*)

Aufgabe 1166. $W_{m,n}$ sei die Menge aller minimalen Gitterwege w, die im ebenen Gitter von $(0,0)$ nach (m,n) führen $(m,n \geq 1)$; ferner bezeichne $z(w)$ die Anzahl der Ecken $(\lrcorner, \ulcorner)$ des Wegs w. Man bestimme $a(m,n) = \sum_{w \in W_{m,n}} z(w)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Neuss, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser betrachten die Nachbarpunkte $P(m-1,n)$ und $Q(m,n-1)$ des Endpunktes (m,n) der Wege und gelangen mit der Überlegung

$$\begin{aligned} a(m,n) = {} & a(m-1,n) + a(m,n-1) \\ & + \text{Anteil der Wege, die in } P \text{ vertikal enden} \\ & + \text{Anteil der Wege, die in } Q \text{ horizontal enden} \end{aligned}$$

zur Rekursionsformel

$$a(m,n) = a(m-1,n) + a(m,n-1) + 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1},$$

welche dann zusammen mit den Randbedingungen $a(m,1) = 2m$ und $a(1,n) = 2n$ nach einiger Rechnung zum Resultat

$$a(m,n) = \frac{2mn}{m+n} \cdot \binom{m+n}{m}$$

führt. *Roland Wyss* beschreitet einen anderen Weg: Codiert man die $\binom{m+n}{m}$ Minimalwege als $(0,1)$-Sequenzen mit m Nullen und n Einsen und schreibt die Codierungen der Grösse nach (im Sinne von Binärzahlen) untereinander (siehe Beispiel für $m = 3$ und $n = 2$),

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

so stehen in der ersten Spalte zuerst $\binom{m+n-1}{m-1}$ Nullen, darunter $\binom{m+n-1}{m}$ Einsen. In der zweiten Spalte kommen zuerst $\binom{m+n-2}{m-2}$ Nullen, darunter $\binom{m+n-2}{m-1}$ Einsen, dann $\binom{m+n-2}{m-1}$

Nullen und schliesslich $\binom{m+n-2}{m}$ Einsen. Im Spaltenpaar $(1,2)$ zählt man also $\binom{m+n-2}{m-1} + \binom{m+n-2}{m-1} = 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1}$ Ecken, d.h. Wechsel 01 oder 10. Aus Symmetriegründen gilt dies für alle $m+n-1$ Spaltenpaare $(1,2)$, $(2,3)$, ..., $(m+n-1, m+n)$. Für die gesamte Eckenzahl erhält man deshalb

$$a(m,n) = (m+n-1) \cdot 2 \cdot \binom{m+n-2}{m-1} = 2m \cdot \binom{m+n-1}{m} = \frac{2mn}{m+n} \cdot \binom{m+n}{m}.$$

Hans Egli und *Walther Janous* deuten die letzte Schreibweise des Resultates: Die mittlere Anzahl der Ecken ist gleich dem harmonischen Mittel $h = 2mn/(m+n)$ der beiden Zahlen m und n, und *Walther Janous* gelingt es sogar, die Varianz der Anzahl der Ecken zu bestimmen:

$$\sigma^2 = \frac{h \cdot (h-1)}{m+n-1}.$$

Aufgabe 1167 (Die einfache dritte Aufgabe). Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s(j) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (\alpha N + \beta k)^j.$$

Man bestimme die Werte von $s(j)$ für $0 \le j \le N$.

Walther Janous, Innsbruck, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Ulrich Abel (Wettenberg, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Detlef Kaese (Neuss, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), H.J. Seiffert (Berlin, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Ulrich Abel, André Calame, Joachim Klose, Volkhard Schindler und *Roland Wyss* argumentieren wie folgt: Mit der binomischen Formel ergibt sich für $j = 0, 1, 2 \ldots$

$$\begin{aligned} s(j) &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (\alpha N + \beta k)^j \\ &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \cdot \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} (\beta k)^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} \beta^\ell \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} k^\ell \\ &= (-1)^N \cdot N! \cdot \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} (\alpha N)^{j-\ell} \beta^\ell \cdot \sigma(\ell, N) \end{aligned}$$

mit den Stirling-Zahlen zweiter Art

$$\sigma(\ell, N) = \frac{(-1)^N}{N!} \cdot \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \binom{N}{k} \cdot k^\ell.$$

Bekanntlich gilt $\sigma(\ell, N) = 0$ für $\ell < N$ und $\sigma(\ell, \ell) = 1$ für $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ Deshalb erhalten wir

$$s(j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le j \le N-1, \\ (-\beta)^N \cdot N!, & \text{falls } j = N. \end{cases}$$

Darüber hinaus liefert unsere Formel wegen $\sigma(N+1, N) = \binom{N+1}{2}$ auch

$$\begin{aligned} s(N+1) &= (-1)^N \cdot N! \cdot \left[\binom{N+1}{N} (\alpha N)^1 \cdot \beta^N \cdot 1 + \binom{N+1}{N+1} (\alpha N)^0 \cdot \beta^{N+1} \binom{N+1}{2} \right] \\ &= (-\beta)^N \cdot \binom{N+1}{2} \cdot N! \cdot (2\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Die meisten anderen Einsender beschreiten einen Lösungsweg, der Entwicklungen der Exponentialfunktion enthält. *Gerhard Wanner* findet eine sehr elegante Variante: Er betrachtet die erzeugende Funktion

$$V(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s(j) \cdot \frac{x^j}{j!}.$$

Die Werte $s(j)$ sind gerade die j-ten Ableitungen von V an der Stelle $x = 0$. In unserem Fall erhalten wir

$$V(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\alpha N + \beta k)^j x^j}{j!}.$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((\alpha N + \beta k)x)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \cdot e^{(\alpha N + \beta k)x} \\ &= e^{\alpha N x} \cdot \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \cdot e^{\beta k x}, \end{aligned}$$

was sich mit dem binomischen Lehrsatz zu

$$V(x) = e^{\alpha N x} \cdot (1 - e^{\beta x})^N = \left(e^{\alpha x}(1 - e^{\beta x})\right)^N$$

vereinfachen lässt. Weil diese Funktion an der Stelle $x = 0$ eine N-fache Nullstelle besitzt, sind alle Ableitungen $s(j) = 0$ für $0 \le j \le N-1$. Um $s(N)$ zu bestimmen, entwickeln wir V in eine Reihe: $V(x) = (-\beta)^N \cdot x^N + \cdots$. Daraus ergibt sich der fehlende Wert $s(N) = (-\beta)^N \cdot N!$.