Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences

Autor(en): **Lesfari, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8478

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 58 (2003) 6 – 20
0013-6018/03/010006-15

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences

A. Lesfari

A. Lesfari has studied mathematics at the University of Louvain (U.C.L.) where he also obtained his doctoral degree. His mathematical interests are in integrable systems and geometry. He has published papers on various topics in interaction between integrable systems, algebraic geometry and complex analysis. The author is now professor at the Department of Mathematics of the University of Chouaib Doukkali in Morocco.

Les variétés de niveau communes des intégrales premières définies par les groupes à un paramètre de difféomorphismes d'un système dynamique, sont invariantes du flot. La solution d'un problème non-linéaire se ramène actuellement, à l'étude de son flot et de ces variétés invariantes. Le théorème d'Arnold-Liouville joue un rôle crucial dans l'étude de ces problèmes. Il permet, entre autres, d'étudier la situation topologique suivante: si les variétés invariantes sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes aux tores réels sur lequels le flot de phase détermine un mouvement quasi-périodique. Les équations du problème sont intégrables par quadratures et le théorème en question montre un comportement très régulier des solutions.

Die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems sind ein Beispiel für ein Hamiltonsches System. Besitzt ein derartiges System von Differentialgleichungen $2n$ Freiheitsgrade, so sind im allgemeinen $2n$ Konstanten der Bewegung erforderlich, damit es integriert werden kann. Unter bestimmten Bedingungen genügen aber hierfür bereits n Konstanten der Bewegung, nämlich dann, wenn diese unabhängig und in Involution sind. Ist dann N eine n-dimensionale Niveaumenge dieser Konstanten der Bewegung, so existieren darauf n linear unabhängige Tangentialfelder, die miteinander kommutieren. Zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft sind, und dies ist eine rein differentialgeometrische Konsequenz, diffeomorph zu einem reellen Torus. Das Hamiltonfeld auf N ist dann, in geeigneten Koordinaten, linear, die Lösungen der ursprünglichen Bewegungsgleichungen also quasiperiodisch. Dies alles ist der Inhalt des klassischen Satzes von Arnold-Liouville. In dem nachfolgenden Beitrag wird ein direkter Zugang zu diesem Satz vorgestellt. Der Zusammenhang mit der Theorie integrabler Hamiltonscher Systeme wird beschrieben und anhand des Eulerschen Kreisels erläutert.

Le but de cet article est de donner une démonstration aussi directe que possible du théorème d'Arnold-Liouville, d'étudier explicitement ses liens avec la théorie des systèmes Hamiltoniens intégrables et enfin l'appliquer à des situations concrètes.

1 Géométrie et topologie des variétés invariantes du flot

Nous allons tout d'abord rappeler quelques notions concernant les champs de vecteurs et équations différentielles. Soient M une variété différentiable de dimension m, TM son fibré tangent et

$$X : M \to TM,$$

un champ de vecteurs différentiable (de classe $\mathscr{C}^\infty$) à support compact (ce qui sera en particulier le cas si la variété M est compacte). Etant donné un point $x \in M$, on note $g_X^t(x)$ la position de x après un déplacement d'une durée $t\,(t \in \mathbb{R})$. On a ainsi une application

$$g_X^t : M \to M, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui est un difféomorphisme, en vertu de la théorie des équations différentielles (voir appendice). Plus précisément, au champ de vecteurs X sont liés:

i) *un groupe à un paramètre de difféomorphisme* g_X^t, avec

$$g_X^{t+s} = g_X^t \circ g_X^s, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Ce groupe est également appelé *flot* et il admet le champ X pour champ de vitesses

$$\frac{d}{dt} g_X^t(x) = X\left(g_X^t(x)\right), \tag{1.1}$$

avec la condition initiale

$$g_X^0(x) = x. \tag{1.2}$$

Evidemment

$$\left.\frac{d}{dt} g_X^t(x)\right|_{t=0} = X(x).$$

Donc par ces formules $g_X^t(x)$ est la courbe sur la variété qui passe par x et telle que la tangente en chaque point est le vecteur $X\left(g_X^t(x)\right)$. Toute solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad x \in M, \tag{1.3}$$

avec la condition initiale x (pour $t = 0$), est indéfiniment prolongeable. La valeur de la solution $g_X^t(x)$ à l'instant t est différentiable par rapport à t et à la condition initiale x.

ii) *l'opérateur différentiel* L_X *d'ordre* 1. Il s'agit de la différentiation des fonctions suivant la direction du champ de vecteurs X. On a

$$L_X : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M), \quad F \mapsto L_X F,$$

où

$$L_X F(x) = \frac{d}{dt} F\left(g_X^t(x)\right)\Big|_{t=0}, \quad x \in M.$$

Ici $\mathscr{C}^\infty(M)$ désigne l'ensemble des fonctions $F : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. L'opérateur L_X est linéaire

$$L_X(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 L_X F_1 + \alpha_2 L_X F_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}),$$

et satisfait à la formule de Leibniz

$$L_X(F_1 F_2) = F_1 L_X F_2 + F_2 L_X F_1.$$

Comme $L_X F(x)$ ne dépend que des valeurs de F au voisinage de x, on peut donc appliquer l'opérateur L_X à des fonctions définies seulement au voisinage d'un point, sans avoir besoin de les prolonger à toute la variété M.

Rappelons que deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sur une variété M *commutent* si et seulement si les flots correspondants commutent

$$g_{X_1}^{t_1} \circ g_{X_2}^{t_2}(x) = g_{X_2}^{t_2} \circ g_{X_1}^{t_1}(x), \quad \forall x \in M,$$

ou ce qui revient au même, si et seulement si

$$[L_{X_1}, L_{X_2}] \equiv L_{X_1} L_{X_2} - L_{X_2} L_{X_1} = 0.$$

Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ un système de coordonnées locales sur la variété M. Dans ce système, le vecteur $X(x)$ s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{m} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

où les fonctions $f_1, \ldots, f_m : M \to \mathbb{R}$, sont les composantes de X par rapport à $(x_1, \ldots, x_m)$.

Avec un léger abus de notation, on peut écrire l'équation (1.3) sous la forme d'un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \qquad\vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, \ldots, x_m), \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x_1, \ldots, x_m$ pour $t = 0$. Le champ de vecteurs X est *différentiable* (*de classe* $\mathscr{C}^\infty$), lorsque toutes les fonctions f_i sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

La preuve détaillée du théorème suivant s'inspire de quelques problèmes posés par Arnold dans [3]. Nous avons cru bon d'ajouter un appendice (Section 4) afin de faciliter la compréhension de certaines notions utilisées dans la démonstration.

Théorème. *On suppose que la variété différentiable M de dimension m est compacte, connexe, muni de m champs de vecteurs différentiables (de classe $\mathscr{C}^\infty$) $X_1, \ldots, X_m$ commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point de M. Définissons l'application*

$$g : \mathbb{R}^m \to M, \quad (t_1, \ldots, t_m) \mapsto g(t_1, \ldots, t_m),$$

où

$$g(t_1, \ldots, t_m) = g_{X_1}^{t_1} \circ \cdots \circ g_{X_m}^{t_m}(x) = g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x), \quad x \in M.$$

Alors

a) *L'application g est un difféomorphisme local.*

b) *L'application g est surjective.*

c) *Le groupe stationnaire*

$$\Lambda = \{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m : g(t_1, \ldots, t_m) = x\},$$

est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$ indépendant du point $x \in M$.

d) *La variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension m.*

Démonstration. a) Soit

$$g_r \equiv g|_U : U \to M, \ (t_1, \ldots, t_m) \mapsto g_r(t_1, \ldots, t_m) = g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x),$$

la restriction de g sur un voisinage U de $(0, \ldots, 0)$ dans $\mathbb{R}^m$ avec $x = g_r(0, \ldots, 0)$. Montrons que l'application g_r est de classe $\mathscr{C}^\infty$. En effet, on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} g_{X_1}^{t_1} = X_1(x) = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m),$$

avec

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, \ldots, x_m), \end{cases}$$

où $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions de la variété M dans $\mathbb{R}$. De même, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g_{X_1}^{t_1} &= (\ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_m) \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \dot{x}_k, \ldots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \dot{x}_k \right), \\ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} g_{X_1}^{t_1} &= (\dddot{x}_1, \ldots, \dddot{x}_m) \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_l} \dot{x}_k \dot{x}_l + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \ddot{x}_k, \ldots, \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k \partial x_l} \dot{x}_k \dot{x}_l + \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \ddot{x}_k \right), \end{aligned}$$

etc. Toutes ces expressions ont un sens car par hypothèse toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Un raisonnement similaire, montre que $g_{X_2}^{t_2}, \ldots, g_{X_m}^{t_m}$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$. Comme la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que $g_r(t_1, \ldots, t_m)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrons maintenant que la matrice Jacobienne de g_r en $(0, \ldots, 0)$ est inversible. En effet, posons

$$g_r(t_1, \ldots, t_m) \equiv (G_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, G_m(t_1, \ldots, t_m)).$$

On a

$$\text{dét}\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial t_m} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_m} \end{pmatrix} = \text{dét}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_r}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial t_m} \end{pmatrix} =$$

$$\text{dét}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_m} g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) \end{pmatrix} \neq 0,$$

car les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_m$ sont linéairement indépendants en chaque point de M. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage suffisamment petit $V \subset U$ de $(0, \ldots, 0)$ et un voisinage W de x tels que g_r induise une bijection de V sur W dont la réciproque

$$g_r^{-1} : W \to V,$$

soit de classe $\mathscr{C}^\infty$. Autrement dit, g_r est un difféomorphisme de V sur $g_r(V)$. Notons que ce résultat est local car même si la matrice Jacobienne ci-dessus est inversible pout tout $(t_1, \ldots, t_m)$, alors l'inverse "globale" de g_r n'existe pas nécessairement.

b) Soit $y \in M$ et déterminons $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$g(t_1, \ldots, t_m) = g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) = y.$$

Nous avons montré dans la partie *a*) que g est un difféomorphisme local. Donc pour tout point x_1 contenu dans un voisinage de x, il existe $(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) = x_1.$$

Comme la variété M est connexe, on peut relier le point x au point y par une courbe $\mathscr{C}$. Soit B_1 une boule ouverte dans M contenant le point x_1. Cette boule existe puisque M est compacte. Soit $x_2 \in \mathscr{C}$ tel que x_2 soit contenu dans la boule B_1. On raisonne comme précédemment, l'application g étant un difféomorphisme local, alors il existe $(t'_1, \ldots, t'_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$g_{X_m}^{t'_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t'_1}(x_1) = x_2.$$

Donc

$$x_2 = g_{X_m}^{t'_m + t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t'_1 + t_1}(x).$$

De même, soit B_2 une boule ouverte dans M contenant le point x_2. Soit $x_3 \in \mathscr{C}$ tel que x_3 soit contenu dans la boule B_2. Comme l'application g est un difféomorphisme local, alors il existe $(t_1'', \ldots, t_m'') \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$g_{X_m}^{t_m''} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1''}(x_2) = x_3.$$

Donc

$$x_3 = g_{X_m}^{t_m''+t_m'+t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1''+t_1'+t_1}(x).$$

En continuant ainsi, on montre (après un nombre k fini d'étapes) l'existence d'un point $(t_1^{(k-1)}, \ldots, t_m^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^m$, tel que:

$$g_{X_m}^{t_m^{(k-1)}} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1^{(k-1)}}(x_{k-1}) = x_k,$$

où $x_k \in \mathscr{C}$, x_k contenu dans une boule ouverte B_{k-1} de M, avec $B_{k-1} \ni x_{k-1}$. Donc

$$x_k = g_{X_m}^{t_m^{(k-1)}+t_m^{(k-2)}+\cdots+t_m'+t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1^{(k-1)}+t_1^{(k-2)}+\cdots+t_1'+t_1}(x), \qquad k \text{ fini.}$$

Cette construction montre qu'on peut, en un nombre k fini d'étapes, recouvrir la courbe $\mathscr{C}$ reliant le point x au point y par des voisinages de x; le point y jouant le rôle de x_k. Notons que l'application g ne peut être injective. En effet, si g est injective, on aurait d'après la partie a) une bijection entre un compact M et un non compact $\mathbb{R}^m$, ce qui est absurde.

c) Considérons

$$\Lambda = \{(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m : g(t_1, \ldots, t_m) = g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) = x\}$$

Evidemment, $\Lambda \neq \emptyset$ car $(0, \ldots, 0) \in \Lambda$. Soit $(t_1, \ldots, t_m) \in \Lambda$, $(t_1', \ldots, t_m') \in \Lambda$. On a

$$g(t_1, \ldots, t_m) = g(t_1', \ldots, t_m') = x.$$

Puisque les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_m$ sont commutatifs, alors

$$\begin{aligned}
g(t_1 + t_1', \ldots, t_m + t_m') &= g_{X_m}^{t_m+t_m'} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1+t_1'}(x) \\
&= g_{X_m}^{t_m'} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1'} \circ g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) \\
&= g_{X_m}^{t_m'} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1'}(x) \\
&= x, \\
g(-t_1, \ldots, -t_m) &= g_{X_m}^{-t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{-t_1}(x) \\
&= g_{X_m}^{-t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{-t_1} \circ g_{X_m}^{t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}(x) \\
&= g_{X_m}^{-t_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{-t_1} \circ g_{X_1}^{t_1} \circ \cdots \circ g_{X_m}^{t_m}(x) \\
&= g_{X_m}^{-t_m} \circ \cdots \circ g_{X_2}^{-t_2} \circ g_{X_2}^{t_2} \circ \cdots \circ g_{X_m}^{t_m}(x) \\
&\vdots \\
&= g_{X_m}^{-t_m} \circ g_{X_m}^{t_m}(x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

D'où $(t_1+t'_1,\dots,t_m+t'_m)\in\Lambda$ et $(-t_1,\dots,-t_m)\in\Lambda$. Donc Λ est stable pour l'addition, l'inverse de $(t_1,\dots,t_m)$ est $(-t_1,\dots,-t_m)$ et par conséquent Λ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^m$. Montrons que Λ est indépendant de x. Soit

$$\Lambda'=\left\{(t'_1,\dots,t'_m)\in\mathbb{R}^m : g(t'_1,\dots,t'_m)=g_{X_m}^{t'_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t'_1}(y)=y\right\}.$$

Par la surjectivité, on peut trouver $(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{R}^m$ tel que:

$$g_{X_m}^{s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x)=y,$$

Soit $(t'_1,\dots,t'_m)\in\Lambda'$. On a

$$\begin{aligned}
g_{X_m}^{t'_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t'_1}(y)&=y,\\
g_{X_m}^{t'_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t'_1}\circ g_{X_m}^{s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x)&=g_{X_m}^{s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x),\\
g_{X_m}^{-s_m+t'_m+s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{-s_1+t'_1+s_1}(x)&=x,\\
g_{X_m}^{t'_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t'_1}(x)&=x.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(t'_1,\dots,t'_m)\in\Lambda$ et donc Λ ne dépend pas de x. Pour montrer que Λ est discret, on considère un voisinage V suffisamment petit du point $(0,\dots,0)$ et un voisinage W du point x. D'après a), l'application g est un difféomorphisme local, donc $g:V\to W$, est bijective et par conséquent aucun point de $W\setminus\{(0,\dots,0)\}$ n'est envoyé sur x; les points du sous-groupe Λ n'ont aucun point d'accumulation dans $\mathbb{R}^m$.

d) Puisque Λ est le noyau de g, il existe une surjection canonique

$$\widetilde{g}:\mathbb{R}^m/\Lambda\to M,\ [(t_1,\dots,t_m)]\mapsto\widetilde{g}[(t_1,\dots,t_m)]=g_{X_m}^{t_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t_1}(x).$$

En effet, soient $(t_1,\dots,t_m)$ et $(s_1,\dots,s_m)$ tels que:

$$\widetilde{g}[(t_1,\dots,t_m)]=\widetilde{g}[(s_1,\dots,s_m)].$$

On a

$$g_{X_m}^{t_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t_1}(x)=g_{X_m}^{s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}
g_{X_1}^{-s_1}\circ\cdots\circ g_{X_m}^{-s_m}\circ g_{X_m}^{t_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t_1}(x)&=g_{X_1}^{-s_1}\circ\cdots\circ g_{X_m}^{-s_m}\circ g_{X_m}^{s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x)\\
&=g_{X_1}^{-s_1}\circ\cdots\circ g_{X_{m-1}}^{-s_{m-1}}\circ g_{X_{m-1}}^{s_{m-1}}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{s_1}(x)\\
&\ \ \vdots\\
&=g_{X_1}^{-s_1}\circ g_{X_1}^{s_1}(x)\\
&=x.
\end{aligned}$$

Comme $X_1,\dots,X_m$ sont commutatifs, alors

$$g_{X_m}^{t_m-s_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t_1-s_1}(x)=x,$$

et d'après ce qui précéde, on a

$$\begin{aligned}
[(t_1-s_1,\dots,t_m-s_m)]&=0,\\
[(t_1,\dots,t_m)-(s_1,\dots,s_m)]&=0,\\
[(t_1,\dots,t_m)]&=[(s_1,\dots,s_m)].
\end{aligned}$$

Par conséquent $\widetilde{g}$ est un difféomorphime. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. Le groupe stationnaire Λ peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_k, \quad 1 \leq k \leq m,$$

où $e_1, \ldots, e_m$ sont des vecteurs linéairement indépendants. En général, on montre (voir [3]) que tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$ peut s'écrire sous cette forme.

2 Systèmes Hamiltoniens complètement intégrables

Supposons maintenant que le système (1.3) s'écrit sous la forme d'un champ de vecteurs Hamiltonien

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad x \in M, \tag{2.1}$$

où $H : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ appelée *Hamiltonien* et $J = J(x)$ est une matrice réelle antisymétrique vérifiant *l'identité de Jacobi*:

$$\{\{H,F\},G\} + \{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} = 0,$$

où

$$\{H,F\} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}, J\frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i,j} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j},$$

sont les *crochets de Poisson.* En fait on montre que si

$$\sum_l \left(J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} \right) = 0,$$

alors J satisfait à l'identité de Jacobi.

Lemme. *Le rang de la matrice J est pair.*

Démonstration. Soit λ la valeur propre de J associée au vecteur propre Z. On a

$$JZ = \lambda Z, \quad Z \neq 0,$$

et

$$Z^*JZ = \lambda Z^*Z, \quad Z^* \equiv \overline{Z}^t,$$

d'où

$$\lambda = \frac{Z^*JZ}{Z^*Z}.$$

Comme $\overline{J} = J$ et $J^t = -J$, alors

$$\overline{Z^*JZ} = Z^t\overline{JZ} = Z^tJ\overline{Z} = \left(Z^tJ\overline{Z}\right)^t = Z^*J^tZ = -Z^*JZ,$$

ce qui implique que Z^*JZ est soit nulle, soit imaginaire pur. Comme Z^*Z est réel, il s'ensuit que toutes les valeurs propres de J sont soit nulles, soit imaginaire pures. Or

$$J\overline{Z} = \overline{\lambda Z},$$

donc si λ est une valeur propre, alors $\overline{\lambda}$ l'est également. Par conséquent, les valeurs propres (non nulles) de J viennent par paires, d'où le lemme.

Rappelons qu'une fonction non constante $F : M \to \mathbb{R}$ est dite *intégrale première* du système (2.1) si $F(x(t))$ est constante sur les trajectoires $x(t)$. Dans le cas où F est différentiable, alors cette condition signifie que $\dot{F} = 0$. Deux fonctions F et G sont dites en *involution* quand leur crochet $\{F, G\}$ est nul.

Passons maintenant à la démonstration du théorème d'Arnold-Liouville dont l'énoncé exact est:

Théorème. *Considérons le système Hamiltonien* (2.1) *associé à la fonction H sur la variété M de dimension $m = 2n$. On suppose que ce système admet n intégrales premières $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n$ en involution c'est-à-dire*

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

et fonctionnellement indépendantes c'est-à-dire

$$dH_1 \wedge \ldots \wedge dH_n \neq 0,$$

en tous les points d'un ouvert dense de M. Si les variétés invariantes

$$M_c \equiv \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in M : H_i(x) = c_i,\ c_i \in \mathbb{R}\},$$

sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes au tore réel $\mathbb{R}^n/$réseau.

Démonstration. Par hypothèse la variété M_c est compacte et connexe. Donc d'après le théorème précédent, il suffit de montrer qu'elle est différentiable, de dimension n et qu'elle est munie de n champs de vecteurs commutatifs. La différentiabilité de cette variété découle de l'indépendance des vecteurs $J\frac{\partial H_1}{\partial x}, \ldots, J\frac{\partial H_n}{\partial x}$. Comme $m = 2n$, alors les intégrales premières $H_i(x_1, \ldots, x_{2n})$, $1 \leq i \leq 2n$, sont des fonctions des variables $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$. Dès lors,

$$\dim\{x \in M : H_i = c_i\} = 2n - 1,$$
$$\dim(\{x \in M : H_i = c_i\} \cap \{x \in M : H_j = c_j\}) = 2n - 2, \quad i \neq j,$$

et donc $\dim M_c = n$. Soient X_i et X_j, $1 \leq i, j \leq n$, des champs de vecteurs différentiables (de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur M, donc sur la variété M_c aussi. Définissons l'opérateur différentiel L_X par

$$L_X : \mathscr{C}^\infty(M_c) \to \mathscr{C}^\infty(M_c),$$

avec $F \mapsto L_X F$ telle que:

$$L_X F(x) = \frac{d}{dt} F\left(g_X^t(x)\right)\Big|_{t=0}, \quad x \in M_c.$$

On a

$$\begin{aligned} L_{X_i} F &= \{F, H_i\}, \\ L_{X_j} L_{X_i} F &= \{\{F, H_i\}, H_j\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{X_i} L_{X_j} F - L_{X_j} L_{X_i} F &= \{\{F, H_j\}, H_i\} - \{\{F, H_i\}, H_j\} \\ &= -\{\{H_j, F\}, H_i\} - \{\{F, H_i\}, H_j\} \\ &= \{\{H_i, H_j\}, F\}, \end{aligned}$$

en vertu de l'identité de Jacobi. Or H_i et H_j sont en involution, donc $\{H_i, H_j\} = 0$ et par conséquent $\left[L_{X_i}, L_{X_j}\right] = 0$, ce qui démontre le théorème.

Une des conséquences du théorème d'Arnold-Liouville, est l'importante notion de complète intégrabilité du système (2.1). Nous allons distinguer deux cas:

a) 1er cas: dét $J \neq 0$. D'après le lemme précédent, $m = 2n$.

Définition. On dit que le système (2.1) est *complètement intégrable* s'il possède n intégrales premières $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n$ fonctionnellement indépendantes en involution telles que pour presque tous les $c_i \in \mathbb{R}$, les variétés invariantes

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left\{x \in \mathbb{R}^{2n} : H_i(x) = c_i\right\}, \tag{2.2}$$

sont compactes et connexes.

Remarque. D'après le théorème d'Arnold-Liouville, les variétés (2.2) sont difféomorphes aux tores réels

$$\begin{aligned} T^n &= \mathbb{R}^n / \textit{réseau} \\ &= \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mod 2\pi\}. \end{aligned}$$

En outre les flots $g_{X_i}^t(x)$ définis par les champs de vecteurs X_{H_i}, $1 \leq i \leq n$, sont des mouvements rectilignes. Ces flots déterminent sur T^n un mouvement quasi-périodique, c'est-à-dire en coordonnées angulaires $\varphi \equiv (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, on a

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \omega = \text{constante}.$$

Les équations du problème sont intégrables par quadratures.

b) 2ème cas: dét $J = 0$. Dans ce cas, on réduit le problème à $m = 2n + k$ et on cherche k intégrales premières $H_{n+1}, \ldots, H_{n+k}$ (fonctions de Casimir) telles que:

$$J \frac{\partial H_{n+i}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Puis ce qui a été dit dans **a**) s'applique ici pour la variété

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{x : H_{n+i}(x) = c_{n+i}\}\right) \cap \mathbb{R}^m,$$

de dimension $m - k = 2n$. Si les mêmes conditions sont remplies, alors les variétés

$$\bigcap_{i=1}^{n+k}\{x \in \mathbb{R}^m : H_i(x) = c_i\},$$

sont difféomorphes au tore réel de dimension n.

3 Application: le corps solide d'Euler

Les équations du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe s'écrivent, dans le cas d'Euler, sous la forme

$$\dot{M} = M \wedge \Omega, \tag{3.1}$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, $M = (m_1, m_2, m_3)$ est le moment angulaire du solide, $\Omega = (m_1/\mathrm{I}_1, m_2/\mathrm{I}_2, m_3/\mathrm{I}_3)$ est la vitesse angulaire, $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ et I_3 sont les moments d'inertie. Ici le point fixe est le centre de gravité du solide.

Considérons l'algèbre de Lie $so(3)$ des matrices antisymétriques d'ordre trois et l'application

$$\mathbb{R}^3 \to so(3), \quad a = (a_1, a_2, a_3) \mapsto A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

laquelle définit un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\left(\mathbb{R}^3, \wedge\right)$ et $(so(3), [,])$ où

$$a \wedge b \mapsto [A, B] = AB - BA.$$

En utilisant cet isomorphisme, on peut reécrire le système (3.1) sous la forme

$$\dot{M} = [M, \Omega], \tag{3.2}$$

où

$$M = (M_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \equiv \sum m_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3),$$

$$\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \equiv \sum \omega_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

En tenant compte du fait que $M = I\Omega$, alors l'équation (3.2) devient

$$\dot{M} = [M, \Lambda M],$$

où

$$\Lambda M = (\Lambda_{ij} M_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \equiv \sum \lambda_i m_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 m_3 & \lambda_2 m_2 \\ \lambda_3 m_3 & 0 & -\lambda_1 m_1 \\ -\lambda_2 m_2 & \lambda_1 m_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \equiv \mathrm{I}_i^{-1},$$

ou sous forme explicite

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3, \\ \dot{m}_2 = (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3, \\ \dot{m}_3 = (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

ou encore sous forme d'un champ de vecteurs Hamiltonien

$$\dot{x} = J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3)^t,$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right),$$

le Hamiltonien et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

On a dét $J = 0$, donc $m = 2n + k$ et $m - k = \mathrm{rg} J$. Ici $m = 3$, $\mathrm{rg} J = 2$ car J est antisymétrique, donc $n = k = 1$. Pour l'étude de la complète intégrabilité de ce système, il nous faut donc trouver deux intégrales premières. La première est connue puisque c'est $H_1 = H$. Pour déterminer la deuxième intégrale première H_2, on procède comme suit: On sait que H_2 est une fonction de Casimir et doit donc satisfaire à

$$J \frac{\partial H_2}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial m_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial m_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\frac{\partial H_2}{\partial m_1} = m_1, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial m_2} = m_2, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial m_3} = m_3,$$

et par conséquent

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Nous avons réduit le problème à

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_2(x) = c_2\right\} \cap \mathbb{R}^3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_2(x) = c_2\right\}.$$

Autrement dit, la variété réduite est une sphère de dimension 2. Les conditions du théorème d'Arnold-Liouville étant satisfaites, le système précédent est complètement intégrable et le vecteur $J\frac{\partial H}{\partial x}$ donne un flot sur une variété

$$\bigcap_{i=1}^{2}\left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_i(x) = c_i\right\}, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

difféomorphe à un tore réel de dimension 1 c'est-à-dire un cercle. Passons maintenant à la résolution explicite. D'après la 1ère équation du système (3.3), on a

$$\frac{dm_1}{m_2 m_3} = (\lambda_3 - \lambda_2)\, dt. \tag{3.4}$$

Or

$$\begin{aligned} \lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2 &= c_1, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= c_2, \end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{c_2\lambda_3 - c_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1^2}{\lambda_3 - \lambda_2}}, \qquad m_3 = \pm\sqrt{\frac{c_1 - c_2\lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1^2}{\lambda_3 - \lambda_2}}.$$

En substituant ces expressions dans (3.4), on obtient une intégrale elliptique

$$\int_{m_1(0)}^{m_1(t)} \frac{dm}{\sqrt{(m^2 + a)(m^2 + b)}} = ct.$$

C'est l'intégrale d'une différentielle holomorphe sur une courbe elliptique

$$\mathscr{E} : w^2 = \left(z^2 + a\right)\left(z^2 + b\right),$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{c_2\lambda_3 - c_1}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\ b &= \frac{c_1 - c_2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ c &= \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'intégration s'effectue au moyen de fonctions elliptiques c'est-à-dire des fonctions méromorphes doublement périodiques.

On trouvera de nombreux autres exemples de systèmes Hamiltoniens complètement intégrables dans [10].

4 Appendice

Dans cet appendice, nous allons montrer brièvement comment construire le flot g_X^t sur toute la variété M. Pour plus de détail voir par exemple [2].

i) *Construction de g_X^t pour t assez petit.* Pour chaque point $x \in M$, on peut trouver un voisinage $U(x) \subset M$ et un nombre réel positif $\varepsilon \equiv \varepsilon(x)$ tels que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, l'équation (1.1) avec la condition initiale (1.2) admet une solution unique $g_X^t(x)$ différentiable définie dans $U(x)$ et vérifiant

$$g_X^{t+s}(x) = g_X^t \circ g_X^s(x),$$

avec $t, s, t+s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. L'application g_X^t est localement un difféomorphisme. Rappelons que le champ de vecteurs X est supposé différentiable (de classe $\mathscr{C}^\infty$) et à support compact K. Du recouvrement de K formé par des ouverts $U(x)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini (U_i), puisque K est compact. Désignons par ε_i les nombres ε correspondants aux U_i et posons

$$\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_i),$$
$$g_X^t(x) = x, \qquad x \notin K.$$

Dès lors, l'équation en question admet une solution unique g_X^t sur $M \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ vérifiant la relation du groupe $g_X^{t+s} = g_X^t \circ g_X^s$, l'inverse de g_X^t étant g_X^{-t} et donc g_X^t est un difféomorphisme pour t suffisamment petit.

ii) *Construction de g_X^t pour tout $t \in \mathbb{R}$.* D'après i), il suffit de construire g_X^t pour $t \in]-\infty, -\varepsilon_0[\cup]\varepsilon_0, \infty[$. Nous allons voir que les applications g_X^t se définissent d'après la loi de multiplication du groupe. Notons que t peut s'écrire sous la forme

$$t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left[0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right[$. Posons, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_X^t = \underbrace{g_X^{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ g_X^{\frac{\varepsilon_0}{2}}}_{k\text{-fois}} \circ g_X^r,$$

et pour $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$g_X^t = \underbrace{g_X^{-\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ g_X^{-\frac{\varepsilon_0}{2}}}_{k\text{-fois}} \circ g_X^r.$$

Les difféomorphismes $g_X^{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}$ et g_X^r ont été définis dans i), et on en déduit que pour tout réel t, g_X^t est un difféomorphisme défini globalement sur M.

Je remercie un referee anonyme pour ses suggestions et ses commentaires éclairants.

Références

[1] Adler, M., van Moerbeke, P.: Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves. *Adv. Math.* 38 (1980), 267–317.

[2] Arnold, V.I.: *Ordinary differential equations*. Springer-Textbook, 3rd ed. 1992.

[3] Arnold, V.I.: *Mathematical methods in classical mechanics*. Springer-Verlag, 2nd ed. 1989.

[4] Dubrovin, B.A., Krichever, I.M., Novikov, S.P.: *Modern geometry. Methods and applications*. Parts I, II, Springer-Verlag, 1984, 1985.

[5] Kozlov, V.V.: *Symmetries, topology and resonances in Hamiltonian mechanics*. A series of modern surveys in mathematics, Springer-Verlag, 1996.

[6] Lesfari, A.: Une approche systématique à la résolution du corps solide de Kowalewski. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 302, série I (1986), 347–350.

[7] Lesfari, A.: Abelian surfaces and Kowalewski's top. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., Paris*, 4e série, t.21 (1988), 193–223.

[8] Lesfari, A.: An affine surface that can be completed by a smooth curve. *Result. Math.* 35 (1999), 107–118.

[9] Lesfari A.: Geodesic flow on $SO(4)$, Kac-Moody Lie algebra and singularities in the complex t-plane. *Publ. Mat., Barc.* 43, N°1 (1999), 261–279.

[10] Lesfari, A.: Completely integrable systems: Jacobi's heritage. *J. Geom. Phys.* 31 (1999), 265–286.

[11] Lesfari, A.: Une méthode de compactification de variétés liées aux systèmes dynamiques. Les cahiers de la recherche, Rectorat-Université Hassan II-Aïn Chock, Casablanca, Maroc, Vol. I, N°1 (1999), 147–157.

[12] Lesfari, A.: The problem of the motion of a solid in an ideal fluid. Integration of the Clebsch's case. *NoDEA, Nonlinear differ. equ. appl.* 8, N°1 (2001), 1–13.

[13] Lesfari, A.: The generalized Hénon-Heiles system, Abelian surfaces and algebraic complete integrability. *Rep. Math. Phys.* 47, N°1 (2001), 9–20.

[14] Lesfari, A.: A new class of integrable systems. *Arch. Math.* 77 (2001), 347–353.

[15] Mumford, D.: *Tata lectures on theta II*. Progress in Math., Birkhäuser, Boston 1982.

A. Lesfari
Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 20, El-Jadida, Morocco
e-mail: `lesfari@ucd.ac.ma`