Leonhard Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie

Autor(en): **Verdun, Andreas**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8494

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 58 (2003) 169 – 176
0013-6018/03/040169-8
DOI 10.1007/s00017-004-0200-5

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Leonhard Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie

Andreas Verdun

Johann Jakob Burckhardt befasste sich als Mathematiker und leidenschaftlicher Bergsteiger mit der Gruppentheorie und der Kristallographie, insbesondere mit der mathematischen Darstellung und Klassifizierung der Kristalle. Als Wissenschaftshistoriker beschäftigte er sich mit der Geschichte der Mathematik und Astronomie, insbesondere mit den Werken von Leonhard Euler (1707–1783). Zu Burckhardts mathematisch-historischem Werk gehört die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Fedorow und Schoenflies (1971) sowie zwischen Fedorow und Klein (1972), der Gesammelten Mathematischen Abhandlungen Ludwig Schläflis (1953–1956) sowie des Bamberger Rechenbuches von 1483 (1966). Über Ludwig Schläfli verfasste er zudem eine Biographie (1948). Burckhardt war bestrebt, die Mathematik im Unterricht aus der historischen Sicht zu vermitteln. Dies ist ihm in seinem *Lesebuch zur Mathematik* von 1968, in dem er Quellentexte von Euklid bis heute auswählte und kommentierte, auf didaktisch hervorragende Weise gelungen. Im Werk *Die Symmetrie der Kristalle* (1988) schilderte Burckhardt die Geschichte der geometrischen Kristall-Lehre von Haüy bis zu ihrer heutigen mathematischen Formulierung, die u.a. geprägt wurde durch die kristallographische Schule in Zürich, der Burckhardt angehörte. Erwähnenswert ist seine *Geschichte der Mathematik an der Universität Zürich* (1916–1950). Die Schwerpunkte seiner wissenschaftshistorischen Arbeiten lagen jedoch in der Bearbeitung und (Mit-)Herausgabe einiger physikalischer und philosophischer Abhandlungen Eulers (Band 2 der Series tertia von 1942) sowie des Euler-Briefwechsel-Verzeichnisses (Band 1 der Series quarta A von 1975) im Rahmen der Euler-Edition. Er war Mitherausgeber des Euler-Gedenkbandes des Kantons Basel-Stadt von 1983, in dem er zwei Kapitel (zur Geschichte der Euler-Edition sowie ein Verzeichnis des Schrifttums über Euler) verfasste und damit wesentlich zum Gelingen dieses prächtigen Bandes beitrug. Seine Auseinandersetzung mit den Eulerschen Werken und sein Wirken in der Euler-Edition sollen mit vorliegendem Beitrag verdankt werden.

Die *Kristallographie* und die *Werke von Euler* bildeten zwei Schwerpunkte in Burckhardts Arbeit, die durchaus ihre Berührungspunkte haben. Obwohl sich die gruppentheoretische Beschreibung und Klassifizierung der Kristalle erst lange Zeit nach Euler im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelte, gehen einige „elementare" Erkenntnisse bereits auf Euler zurück. So entdeckte Euler zum Beispiel den Polyedersatz und leistete damit einen ersten Beitrag zur Kristallographie. In seiner Abhandlung [E407] untersuchte Euler

die Orthogonalitätsbedingungen für rechtwinklige Koordinaten im Raum und drückte die Koeffizienten der linearen homogenen Transformationen, die eine Summe von n Quadraten invariant lassen, für $n = 3, 4, 5$ durch trigonometrische Funktionen und für $n = 3, 4$ durch rationale Funktionen von Parametern aus. Die Formeln für $n = 3$ zur Transformation rechtwinkliger Raumkoordinaten verwendete Euler bereits in einer früheren Arbeit [E336] zur Darstellung der Starrkörper-Rotation (siehe unten). Er legte die Resultate am 5. März 1770 der Petersburger Akademie vor, welche die Abhandlung 1771 publizierte. Am 9. Oktober 1775 präsentierte Euler der Petersburger Akademie eine weitere Abhandlung [E478] zu diesem Thema, die 1776 veröffentlicht wurde. Darin beweist er den scheinbar trivialen Satz, dass es nach beliebigen Drehungen einer Kugel um ihr Zentrum stets eine transformationsinvariante (feste) Achse gibt. Er zeigte, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die „Transformationsmatrix" die „Determinante" $+1$ besitzt. Damit bewies er einen Hilfssatz, den man zur Klassifizierung der Kristalle benötigt und der etwas allgemeiner formuliert lautet: Jede orthogonale Transformation der Determinante $+1$ besitzt in einem Raum ungerader Dimensionszahl ausser dem Ursprung einen weiteren Fixpunkt.

Von grosser Bedeutung weit über die Kristallographie hinaus waren nicht nur Eulers Studien zu den Koordinatentransformationen, sondern vor allem seine Einführung spezieller Bezugssysteme und ihre Anwendung auf Probleme der Mechanik und Astronomie. Der Gebrauch raumfester (inertialer) und bewegter (rotierender) Koordinatensysteme durch Euler spielte für die Entwicklung der exakten Wissenschaften im allgemeinen und für die Entdeckung der Eulerschen Kreiselgleichungen im speziellen eine enorm wichtige Rolle. Wir skizzieren im folgenden den Weg, der zur Entdeckung der Bewegungsgleichungen der Rotation starrer Körper führte.

1 Eulers „Cartesische" Koordinatensysteme

Noch in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurden mechanische und astronomische Probleme in der Sprache der Geometrie formuliert und gelöst. Die eingeführten Grössen („Variablen") bezogen sich meist auf ein Koordinatensystem, das implizit durch die geometrische Form des betrachteten Körpers oder durch das gegebene Problem definiert war. Mechanische und himmelsmechanische Probleme wurden üblicherweise nur in zwei Dimensionen studiert. Heute ist es bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene selbstverständlich, dass Koordinatensysteme und Parameter oder Variable derart gewählt werden, dass das betrachtete Problem möglichst einfach formuliert und gelöst werden kann (sog. Parametrisierung). Mit der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems werden die Parameter festgelegt. Um Bewegungsgleichungen unabhängig vom jeweils gewählten Koordinatensystem formulieren zu können, werden sie gewöhnlich in vektorieller Form geschrieben. Bei der Komponenten- oder Matrixdarstellung eines Vektors wird implizit angenommen, dass sich seine Komponenten auf orthogonale Basisvektoren bzw. auf ein dreidimensionales, rechtwinkliges Rechtssystem beziehen. Ein solches sog. „Cartesisches" Koordinatensystem, explizit definiert als Bezugssystem für die analytische Behandlung mechanischer und astronomischer Probleme, wurde zum ersten Mal von Euler in seiner 1728/29 verfassten und 1732 publizierten Arbeit [E9] über geodätische Linien eingeführt. Die drei Achsen des Koordinatensystems zeichnete Euler – für uns etwas ungewohnt – aneinander anschliessend, also ohne gemeinsamen

Koordinatenursprung. Ein Cartesisches System, dessen Koordinatenachsen nun von einem gemeinsamen Ursprung ausgehen, findet sich erstmals in Eulers erster Schiffstheorie [E110], die er bereits 1738 fertigstellte, aber erst 1749 publizieren konnte. In seiner allgemeinen Behandlung der Bewegung der Himmelskörper [E112], die Euler am 8. Juni 1747 der Berliner Akademie präsentierte und 1749 publizierte, bezog er die Variablen, welche die Bewegungen der Himmelskörper definieren, auf ein dreidimensionales, orthogonales Koordinatensystem mit der Sonne als Zentrum (Ursprung). Für jede Koordinate resultiert eine Bewegungsgleichung. Mit dieser Arbeit hatte sich, zumindest bei Euler, der Gebrauch von dreidimensionalen, „quasi-inertialen", Cartesischen Koordinatensystemen, die von den jeweils betrachteten Körpern und/oder Problemen unabhängig sind, definitiv etabliert.

2 Rotierende körperfeste Bezugssysteme und Eulers Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper

Alexis Claude Clairaut (1713–1765) veröffentlichte 1745 in den Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1742 eine Abhandlung, in der er ein rotierendes Koordinatensystem einführte, das fest mit einem sich drehenden, starren Körper verbunden ist. Ein derartiges, sog. körperfestes, System brauchte Euler erstmals in einer 1746 erschienenen Abhandlung [E86] über die erzwungene Bewegung eines Körpers in einem Tubus, der sich um eine feste Achse senkrecht zum Tubus dreht. Das rotierende Koordinatensystem war bei Clairaut und Euler durch die Parametrisierung des Problems in Polarkoordinaten „automatisch" gegeben und wurde daher „nur" implizit eingeführt. Die Formulierung der Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten etablierte sich schnell zu einer Standardmethode. Euler verwendete sie, in Kombination mit den Bahnelementen, zur Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper in seinen „Recherches" [E112] von 1747 sowie in seiner ersten Mondtheorie [E187] von 1753. Bis zur ersten expliziten Definition und zum ersten gezielten Gebrauch eines rotierenden, Cartesischen Bezugssystems sollten aber noch einige Jahre vergehen. Dies geschah in Zusammenhang mit Eulers Herleitung seiner berühmten Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper. Am 3. September 1750 las Euler vor der Berliner Akademie ein Memoire [E177], in dem er nichts Geringeres als die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik ankündigte. Euler erkannte, dass Newtons zweites Gesetz, das bereits in seinen „Recherches" [E112] von 1747 zum ersten Mal in der Geschichte der exakten Wissenschaften in der noch heute gebräuchlichen Form erschien, nicht nur auf Punktmassen, sondern auf jedes beliebige Massenelement anwendbar und somit universell gültig ist. Ausgehend von diesem „ersten Prinzip der Mechanik" (wie Euler es benannte und als solches deklarierte) bzw. dem Impulssatz (wie wir heute sagen würden) leitete er (unter impliziter Verwendung des sog. d'Alembertschen Prinzips) die Bewegungsgleichungen der Rotation starrer Körper bezüglich eines Inertialsystems her. Er bemerkte zu den drei Komponentengleichungen: „Ce seront donc ces trois formules, qui contiennent les nouveaux principes de Mécanique, dont on a besoin pour déterminer le mouvement des corps solides... Et il est évident que ces nouveaux principes sont suffisans pour tous les cas imaginables des mouvemens, dont les corps solides sont susceptibles." Aus dieser Aussage folgt, dass Euler diese Gleichungen (die nichts anderes als den Drehimpulssatz darstellen) als neues

Prinzip der Mechanik betrachtete, weil nur diese (und nicht der Impulssatz) die Rotationsbewegungen starrer Körper zu beschreiben vermögen. Euler war überzeugt, damit ein neues, zusätzliches Prinzip gefunden zu haben, welches das bereits allgemein bekannte „erste Prinzip" *enthielt*. (Diese Interpretation weicht von der etablierten Ansicht der Wissenschaftshistoriker ab, die Eulers neu entdecktes Prinzip mit dem von ihm zu Beginn seiner Abhandlung statuierten Impulssatz identifizieren.)

Euler erkannte die Bedeutung und Tragweite seiner Entdeckung noch nicht, vermutlich, weil er die Gleichungen nicht lösen konnte, da sie durch die Rotation des Körpers im inertialen Raum für jeden Zeitpunkt hätten „ausgewertet" werden müssen. Ein erster Versuch, die Gleichungen zu integrieren, schlug fehl. In einer Abhandlung [E336], die Euler am 7. Oktober 1751 der Berliner Akademie präsentierte, versuchte er es mit einem körperfesten Bezugssystem, das er mit Hilfe der *Eulerschen Winkel* auf das inertiale System bezog. Die Gleichungen blieben aber unlösbar. Immerhin bewies er einen wichtigen Satz, der ihn später auf die Lösung führen sollte, nämlich: In jedem Körper von beliebiger Form existiert eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht und um die der Körper frei, mit gleichförmiger Geschwindigkeit, rotieren kann. Die Eulerschen Winkel führte Euler übrigens zum ersten Mal im vierten Kapitel des Anhanges seiner Einführung in die Analysis des Unendlichen [E102] ein, die er 1748 publizierte. Heute werden die Eulerschen Winkel meist in Rotationsmatrizen resp. in Verknüpfungen von Drehmatrizen verwendet. Produkte von Rotationsmatrizen sind nichts anderes als eine Kurzschreibweise des Formelsystems der sphärischen Trigonometrie, das von Euler in der heute noch gebräuchlichen Form und Notation, vermutlich in Zusammenhang mit seinen Studien zur Rotation von starren Körpern, 1753 in seinen Abhandlungen [E214] und [E215] eingeführt wurde. Es existiert übrigens noch eine weitere, postum erschienene und undatierte Abhandlung [E825] von Euler zur Bewegung starrer Körper. Sie ist vermutlich in den frühen 1750er Jahren entstanden. Darin versuchte Euler, die Bewegung eines starren Körpers um einen Fixpunkt mittels der Eulerschen Winkel zwischen inertialem und körperfestem (mitrotierendem) Koordinatensystem zu bestimmen. Es könnte sich dabei sogar um eine „Vorarbeit" zur Abhandlung [E336] handeln.

Ende der 1750er Jahre nahm Euler einen neuen Anlauf zur Lösung der Bewegungsgleichungen des Starrkörpers. In einem Memoire [E293], das er der Berliner Akademie am 12. Januar 1758 vorlegte und das 1765 publiziert wurde, bestimmte er zunächst die momentane Rotationsachse bei der „täglichen" Bewegung eines Planeten. Der entscheidende Durchbruch gelang Euler aber erst mit seiner Abhandlung [E291], die er der Berliner Akademie am 6. Juli 1758 vorlegte und in der er – anknüpfend an die wichtige Feststellung in [E336] – die mechanischen Eigenschaften starrer Körper mittels der Begriffe „Trägheitsachsen" und „Trägheitsmomente", „Hauptträgheitsachsen" und „Hauptträgheitsmomente" mathematisch charakterisieren konnte. Euler vermutete bereits in seiner „Scientia navalis" [E110], dass es in jedem festen Körper drei ausgezeichnete Achsen gibt, um die der Körper frei, d.h. ungestört, rotieren kann. Er nahm damit das System der Hauptträgheitsachsen hypothetisch vorweg. In der [E291] folgenden Arbeit [E292], die Euler der Berliner Akademie am 9. November 1758 vorlegte, die jedoch erst 1765 publiziert wurde, formulierte er die Gleichungen bezüglich des Hauptträgheitsachsensystems, wodurch sich diese sehr vereinfachen liessen. Das Resultat wird noch heute

als die *Eulerschen Gleichungen der Rotationsbewegung starrer Körper* bezeichnet. Der entscheidende Schritt zu diesem Erfolg war die Einführung eines Bezugssystems, das zwar fest mit dem Körper verbunden ist und mit diesem rotiert, das aber nichts mit der geometrischen Form des Körpers zu tun hat, sondern durch die Massenverteilung innerhalb des Körpers bzw. durch dessen Trägheitsmomente definiert ist. Es ist dies ein Meilenstein in der Definition und im Gebrauch von Bezugssystemen.

Euler bestimmte mit seinen Gleichungen die Bewegung der Rotationsachse bezüglich der Achse des maximalen Trägheitsmomentes (der Figurenachse) der Erde unter der Annahme, dass diese Achsen nicht kollinear sind, sondern sich um einen kleinen Winkel (de facto variiert dieser zwischen 0 und 0.3 Bogensekunden) unterscheiden, und dass keine äusseren Kräfte bzw. Drehmomente (ausgeübt durch Mond und Sonne) wirken. In seinem ersten Versuch [E308], den er am 18. Januar 1759 vorstellte, ist die Formel für die Periode der sog. *Eulerschen freien Nutation*, die einzig von der dynamischen Abplattung der Erde abhängt, noch falsch. Erst im zweiten Anlauf, in seiner berühmten, 1760 fertiggestellten, zweiten Mechanik [E289] von 1765, fand Euler die richtige Formel. Mit dem Euler zur Verfügung stehenden Wert für die Abplattung der Erde ergibt sich eine Periode von 234 Tagen (mit heutigem Wert für die Abplattung sind es 304 Tage). Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurden in der Positionsastronomie (Astrometrie) grosse Anstrengungen unternommen, die Eulersche freie Nutation, welche sich als Breitenvariation oder „Polschwankung" bemerkbar macht, empirisch nachzuweisen. Die Beobachtungsgenauigkeiten wurden immer besser, die eigens zu diesem Zweck durchgeführten Messreihen immer länger. Seit den 1840er Jahren fand man signifikante Änderungen der Polhöhen, die *Eulersche Periode* liess sich aber nicht nachweisen. Der Grund bestand darin, dass bei der Auswertung der Beobachtungen die Periode der Polschwankung nicht *auch* als Parameter (neben zahlreichen anderen) geschätzt wurde. Erst Seth Carlo Chandler (1846–1913) vermochte sich vom „Paradigma" der Eulerschen Periode zu lösen und konnte 1891 die tatsächliche Periode von 430 Tagen bestimmen.

3 Eulers „Entdeckung" des Drehimpulssatzes

Selbst nach diesem Triumph vermochte Euler seine Gleichungen noch nicht im heutigen physikalischen Sinn, nämlich als eine Form des Drehimpulssatzes, zu interpretieren. Dies ist umso erstaunlicher, als der Drehimpulssatz implizit mindestens dreimal und in drei verschiedenen Formen in früheren Arbeiten Eulers erschien. Im ersten Band seiner „Scientia navalis" [E110] definierte Euler den Begriff „vis gyratoria", worunter die Winkelbeschleunigung zu verstehen ist, sowie den Begriff „Trägheitsmoment" für ein System von Punktmassen. Im Korollarium 1, §165, setzt er dann die vis gyratoria gleich der Summe der Drehmomente dividiert durch das Gesamtträgheitsmoment des Systems. Der Drehimpulssatz erschien ein zweites Mal in Eulers Memoire über die Bewegung der Mondknoten [E138], das er der Berliner Akademie am 5. Oktober 1744 vorlegte. Von dieser Abhandlung erschien 1746 in den Memoiren der Berliner Akademie lediglich eine Zusammenfassung in französischer Sprache, vermutlich weil Euler seine Arbeit in Latein verfasste, in den Berliner Memoiren aber nur in französischer Sprache publiziert werden durfte. Euler legte daher seine lateinische Abhandlung am 2. September 1748 der Petersburger Akademie vor, die sie in den Kommentaren der Akademie 1750 veröffentlichte. Das „Sensationelle" dieser Arbeit besteht in der expliziten Herleitung des

Drehimpulssatzes für diskrete Systeme von Massenpunkten (konkret für Erde, Mond und Sonne), ausgehend vom Impulssatz, in drei Dimensionen. Genau einen Monat nach seiner Präsentation von [E138] las Euler am 5. November 1744 eine weitere Abhandlung [E174] vor der Berliner Akademie über die Bewegung flexibler Körper. Darin leitete er die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Drehimpulssatzes in Form der Drehmomente und Trägheitsmomente der betrachteten Körper her. Damit erschien der Drehimpulssatz ein drittes Mal. Die Abhandlung wurde erst 1751 in den Memoiren der Berliner Akademie gedruckt. Es dauerte aber noch ein Vierteljahrhundert, bis Euler erkannte, dass der Drehimpulssatz ein neues, vom Impulssatz unabhängiges und universell gültiges Prinzip der Mechanik darstellt. Er präsentierte diese „Entdeckung" am 16. Oktober 1775 der Petersburger Akademie, die als „neue Methode zur Bestimmung der Bewegung starrer Körper" [E479] im Jahre 1776 in den Neuen Kommentaren der Petersburger Akademie publiziert wurde.

4 Eulers Einführung eines mitrotierenden, nicht körperfesten Bezugssystems

Die bisher betrachteten und von Euler eingeführten rotierenden Bezugssysteme waren stets fest mit dem betrachteten Körper verbunden. In seiner zweiten Mondtheorie [E418] von 1772, die Euler am 20. Oktober 1768 der Petersburger Akademie vorlegte, führte er erstmals ein mitrotierendes Bezugssystem ein, das nicht fest mit einem Körper verbunden ist. Solche Bezugssysteme verwendete er zur Bestimmung der Bewegung der Erde auf Grund der Störungen der Venus [E425], deren Resultate er ebenfalls 1772 veröffentlichte, sowie zur Berechnung genauer Planetentafeln [E458], die 1774 erschienen sind. Die in diesen fundamentalen Arbeiten verwendeten Bezugssysteme drehen sich mit der mittleren Bewegung der gestörten Himmelskörper. Die Bewegungsgleichungen wurden dadurch erheblich einfacher, und die Störungen konnten in schnell konvergierende Reihen entwickelt werden. Dieses Vorgehen entwickelte sich zu einer Standardmethode in den Mondtheorien und in den allgemeinen Störungstheorien des 19. Jahrhunderts. George William Hill (1838–1914) griff die Ideen Eulers wieder auf und entwickelte seine Mondtheorie auf der Grundlage eines mitrotierenden Bezugssystems.

Referenzen

Abkürzungen:

CASP	Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae
HARSB	Histoire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres (de Berlin)
NCASP	Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae
O. I	Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series prima (Opera mathematica)
O. II	Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series secunda (Opera mechanica et astronomica)
E#	Eneström-Nummer

Zitierte Werke von Leonhard Euler:

[E9] De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente. CASP, 3 (1728), 1732, 110–124; O. I, 25, 1–12.

[E86] De motu corporum in superficiebus mobilibus. Opuscula varii argumenti, 1, 1746, 1–136; O. II, 6, 75–174.

[E102] Introductio in analysin infinitorum. Tomus secundus. Lausannae, Bousquet 1748, 366–373; O. I, 9, 371–378.

[E110] Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Pars prior. Petropoli typis academiae scientiarum 1749.

[E112] Recherches sur le mouvement des corps célestes en général. HARSB, 3 (1747), 1749, 93–143; O. II, 25, 1–44.

[E138] De motu nodorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione. NCASP, 1 (1747/48), 1750, 387–427; O. II, 23, 11–48.

[E174] De motu corporum flexibilium. Opuscula varii argumenti, 3, 1751, 88–165; O. II, 10, 177–232.

[E177] Découverte d'un nouveau principe de mécanique. HARSB, 6 (1750), 1752, 185–217; O. II, 5, 81–108.

[E187] Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates. Impensis acad. imp. sc. Petropolitanae 1753. O. II, 22.

[E214] Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. HARSB, 9 (1753), 1755, 223–257; O. I, 27, 277–308.

[E215] Élémens de la trigonométrie sphéroïdique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. HARSB, 9 (1753), 1755, 258–293; O. I, 27, 309–339.

[E289] Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accommodata. Rostochii et Gryphiswaldiae, Röse 1765. O. II, 3.

[E291] Recherches sur la connoissance mécanique des corps. HARSB, 14 (1758), 1765, 131–153; O. II, 8, 178–199.

[E292] Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. HARSB, 14 (1758), 1765, 154–193; O. II, 8, 200–235.

[E293] Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes. HARSB, 14 (1758), 1765, 194–218; O. II, 829, 199–219.

[E308] Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes. HARSB, 15 (1759), 1766, 265–309; O. II, 29, 220–256.

[E336] Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. HARSB, 16 (1760), 1767, 176–227; O. II, 8, 313–356.

[E407] Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. NCASP, 15 (1770), 1771, 75–106; O. I, 6, 287–315.

[E418] Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca lunae expedite computari possunt incredibili studio atque indefesso labore trium academicorum: Johannis Alberti Euler, Wolffgangi Ludovici Krafft, Johannis Andreae Lexell. Petropoli, typis academiae imperialis scientiarum 1772. O. II, 22.

[E425] De perturbatione motus terrae ab actione Veneris oriunda. NCASP, 16 (1771), 1772, 426–467; O. II, 26 (in preparation).

[E458] Nova methodus motus planetarum principalium ad tabulas astronomicas reducendi. NCASP, 18 (1773), 1774, 354–376; O. II, 28, 273–292.

[E478] Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. NCASP, 20 (1775), 1776, 189–207, O. II, 9, 84–98.

[E479] Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. NCASP, 20 (1775), 1776, 208–238; O. II, 9, 99–125.

[E825] De motu corporum circa punctum fixum mobilium. Opera postuma, 2, 1862, 43–62; O. II, 9, 413–441.

Zitierte Werke von Johann Jakob Burckhardt:

[1942] Leonhardi Euleri: Rechenkunst. Accesserunt commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea. Ediderunt Edmund Hoppe†, Karl Matter, Johann Jakob Burckhardt. (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series tertia, Volumen secundum). Venditioni exponunt B.G. Teubner Lipsiae et Berolini, Orell Füssli Turici et Lipsiae.

[1948] Ludwig Schläfli, 1814–1895. (*Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik"*, Beiheft Nr. 4, Juli 1948). Birkhäuser, Basel.

[1950] Ludwig Schläfli, 1814–1895. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. 3 Bände. Birkhäuser, Basel 1950/1953/1956.

[1966] Bamberger Rechenbuch 1483 – Das erste deutsche gedruckte Rechenbuch, Ulrich Wagner zugeschrieben. Nachwort von J.J. Burckhardt. Faksimiledruck der Schweizerischen Bibliophilen-Gesellschaft. Mikrokopie GmbH, München.

[1968] Lesebuch zur Mathematik – Quellen von Euklid bis heute. (*Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes*, Heft 5). Räber Verlag, Luzern/Stuttgart.

[1971] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und A. Schoenflies, 1889–1908. (*Archive for History of Exact Sciences*, Bd. 7 (1971), Nr. 2, 91–141). Springer Verlag, Berlin.

[1972] Der Briefwechsel von E.S. von Fedorow und F. Klein, 1893. (*Archive for History of Exact Sciences*, Bd. 9 (1972), Nr. 2, 85–93). Springer Verlag, Berlin.

[1975] Leonhardi Euleri: Commercium epistolicum. Descriptio commercii epistolici. Ediderunt Adolf P. Juškevič, Vladimir I. Smirnov et Walter Habicht; auxilio Johann Jakob Burckhardt, Joachim Otto Fleckenstein et Ašot T. Grigorijan. (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*, Series Quarta A, Volumen primum). Venditioni exponunt Birkhäuser Basileae.

[1980] Die Mathematik an der Universität Zürich 1916–1950 – Unter den Professoren R. Fueter, A. Speiser, P. Finsler. (*Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik“*, Beiheft Nr. 16). Birkhäuser, Basel.

[1983a] Leonhard Euler, 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Hrsg. v. J.J. Burckhardt, E.A. Fellmann u. W. Habicht. Birkhäuser, Basel.

[1983b] Die Euler-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft – ein Beitrag zur Editionsgeschichte. In [1983a], 501–510.

[1983c] Euleriana – Verzeichnis des Schrifttums über Leonhard Euler. In [1983a], 511–552.

[1988] Die Symmetrie der Kristalle – Von René-Just Haüy zur kristallographischen Schule in Zürich. Mit einem Beitrag v. Erhard Scholz. Birkhäuser, Basel.

Andreas Verdun
Astronomisches Institut
Universität Bern
Sidlerstrasse 5
CH–3012 Bern, Schweiz
e-mail: `andreas.verdun@aiub.unibe.ch`