Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 58 (2003)

Artikel: Die Ziffern der Fibonacci-Zahlen
Autor: Spilker, Jürgen
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8480

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 58 (2003) 26 – 33
0013-6018/03/010026-8

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Die Ziffern der Fibonacci-Zahlen

Jürgen Spilker

Jürgen Spilker wurde 1935 in Berlin geboren. Er studierte Mathematik und Physik für das Lehramt in Göttingen und promovierte dort 1962 bei H. Grauert über automorphe Funktionen. Heute interessieren ihn zahlentheoretische Probleme, insbesondere Beweismethoden aus der reellen Analysis.

0 Einleitung und Sätze

Die rekursiv definierte Folge

$$f(1) = f(2) = 1, \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n) \quad (n \geq 1)$$

ist nach Fibonacci (alias Leonardo Pisano, um 1200) benannt. Sie beschreibt das Wachstum einer Kaninchen-Population, wenn man folgende Regeln zugrunde legt:

a. Am Anfang des 1. Monats lebt genau ein Paar von Kaninchen;

b. jedes Kaninchen-Paar wirft am Anfang jeden Monats genau ein zweites Paar, beginnend mit dem 3. Monat seines Lebens; auch das Urpaar wirft erst ab dem 3. Monat;

c. Kaninchen sind unsterblich.

Dann ist $f(n)$ die Anzahl der Paare, die im n-ten Monat leben.

In der vorliegenden Arbeit werden die (Dezimal)-Ziffern betrachtet, die in der Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

auftreten. Kommt die 2 darin häufiger vor als die 3? Vermutlich weiß man die Antwort nicht. Gibt man jedoch eine feste Stelle für die Ziffer vor, dann kann man diese Häufigkeiten berechnen. So ist die 2 als Endziffer seltener als die 3. Alle Ziffern treten in periodischer Weise als Endziffern auf (Satz 1). Als Leitziffer kommt dagegen die 2 häufiger vor als die 3. Jede Ziffer ausser der Null tritt in fast-periodischer Weise als Leitziffer auf (Satz 2). Schließlich wird untersucht, wieviele Fibonacci-Zahlen genau k Stellen haben. Ist $k \geq 2$, dann sind es 4 oder 5; der erste Fall ist häufiger und tritt in fast-periodischer Weise auf (Satz 3). Dieser Zugang liefert neue Beweise für bekannte Aussagen.

Die wichtigsten Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen findet man in dem Buch von Hoggatt [2]. Dort ist auch auf S. 11 die für alle $n \geq 1$ gültige Binet-Formel

$$f(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ mit } \alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots,\ \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618\ldots \qquad (1)$$

angegeben.

Wenn man eine natürliche Zahl n konkret benennen will, dann benutzt man meistens ihre Dezimal-Darstellung

$$n = \sum_{0 \leq k \leq K} e_k(n)\, 10^k \quad \text{mit} \quad e_k(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\}\,.$$

Ist $e_K(n) \neq 0$, dann schreibt man diese Zahl üblicherweise in der Form

$$e_K(n) e_{K-1}(n) \ldots e_1(n) e_0(n)$$

und nennt $e_K(n)$ die Leitziffer von n; $e_0(n)$ ist die Endziffer. Die ersten Fibonacci-Zahlen in Dezimal-Form sind in der folgenden Tabelle enthalten:

$f(1)$	1	$f(25)$	75025	$f(49)$	7778742049
$f(2)$	1	$f(26)$	121393	$f(50)$	12586269025
$f(3)$	2	$f(27)$	196418	$f(51)$	20365011074
$f(4)$	3	$f(28)$	317811	$f(52)$	32951280099
$f(5)$	5	$f(29)$	514229	$f(53)$	53316291173
$f(6)$	8	$f(30)$	832040	$f(54)$	86267571272
$f(7)$	13	$f(31)$	1346269	$f(55)$	139583862445
$f(8)$	21	$f(32)$	2178309	$f(56)$	225851433717
$f(9)$	34	$f(33)$	3524578	$f(57)$	365435296162
$f(10)$	55	$f(34)$	5702887	$f(58)$	591286729879
$f(11)$	89	$f(35)$	9227465	$f(59)$	956722026041
$f(12)$	144	$f(36)$	14930352	$f(60)$	1548008755920
$f(13)$	233	$f(37)$	24157817	$f(61)$	2504730781961
$f(14)$	377	$f(38)$	39088169	$f(62)$	4052739537881
$f(15)$	610	$f(39)$	63245986	$f(63)$	6557470319842
$f(16)$	987	$f(40)$	102334155	$f(64)$	10610209857723
$f(17)$	1597	$f(41)$	165580141	$f(65)$	17167680177565
$f(18)$	2584	$f(42)$	267914296	$f(66)$	27777890035288
$f(19)$	4181	$f(43)$	433494437	$f(67)$	44945570212853
$f(20)$	6765	$f(44)$	701408733	$f(68)$	72723460248141
$f(21)$	10946	$f(45)$	1134903170	$f(69)$	117669030460994
$f(22)$	17711	$f(46)$	1836311903	$f(70)$	190392490709135
$f(23)$	28657	$f(47)$	2971215073	$f(71)$	308061521170129
$f(24)$	46368	$f(48)$	4807526976	$f(72)$	498454011879264

Wir behandeln in diesem Artikel 3 Probleme über die Ziffern der Fibonacci-Zahlen.

Problem 1 handelt von den Endziffern der $f(n)$.

Satz 1 *Sei $e \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ eine feste Ziffer und*

$$r(n) := \begin{cases} 1 & \textit{die Endziffer von } f(n) \textit{ ist } e, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die Folge $(r(n))_{n\geq 1}$ periodisch mit der Periode 60, und sie hat den Mittelwert

$$M(r) = \begin{cases} \frac{1}{15} & \textit{falls } e \textit{ gerade,} \\ \frac{2}{15} & \textit{falls } e \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Dabei ist $M(r) := \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{1\leq n\leq N} r(n)$.

Bemerkung Man kann auch einen rechtsbündigen Block von einer festen Länge j, also die Ziffern $e_{j-1}(f(n)), e_{j-2}(f(n)), \ldots, e_0(f(n))$ vorgeben. Wieder ist die zugehörige charakteristische Folge $(r(n))_{n\geq 1}$ periodisch; ihre Periode ist 300, falls $j = 2$ und $15 \cdot 10^{j-1}$, falls $j \geq 3$ ist ([6]). Die Mittelwerte kennt man nicht.

Nun zu **Problem 2** über die Leitziffern der $f(n)$. Daß auch die Leitziffern eine periodische Folge bilden, kann man nicht erwarten, denn $f(n)$ entsteht durch Addition von $f(n-1)$ und $f(n-2)$, und die Überträge bei der Addition zerstören die Periodizität. Aber immerhin ist die Folge noch fast-periodisch. Um das zu präzisieren, definieren wir für eine komplexe Folge $(\ell(n))_{n\geq 1}$ die Halb-Norm

$$\|\ell(n)\|_1 := \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leq n\leq N} |\ell(n)|$$

und nennen die Folge $\ell = (\ell(n))$ fast-periodisch, wenn zu jedem natürlichen j eine komplexe Linearkombination h_j von Exponentialfolgen $(e^{2\pi i\alpha n})_{n\geq 1}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $\|\ell - h_j\|_1 < \frac{1}{j}$ ist. Man sieht leicht, daß jede fast-periodische Folge ℓ einen Mittelwert $M(\ell)$ hat und $M(\ell) = \lim\limits_{j\to\infty} M(h_j)$ gilt ([5, Kap. VI]).

Satz 2 *Sei $e > 0$ eine feste Ziffer und*

$$\ell(n) := \begin{cases} 1 & \textit{die Leitziffer von } f(n) \textit{ ist } e, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die Folge $(\ell(n))_{n\geq 1}$ fast-periodisch, aber nicht schließlich-periodisch, und sie hat den Mittelwert

$$M(\ell) = \log\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

Alle Logarithmen in diesem Artikel sind zur Basis 10 zu nehmen.

Bemerkung Man kann auch einen linksbündigen Leitblock fester Länge j vorgeben und erhält wieder eine fast-periodische Folge. Sind $e_1 e_2 \cdots e_j$ die ersten Ziffern ($e_1 \neq 0$), dann ist ihr Mittelwert

$$\log\left(1 + \frac{1}{e_1 10^{j-1} + e_2 10^{j-2} + \cdots + e_j}\right).$$

Insbesondere tritt der Anfangsblock $100\cdots0$ am häufigsten bei den Fibonacci-Zahlen auf.

Offene Fragen Man kennt vermutlich keine ähnlichen Resultate, die alle Ziffern der Fibonacci-Zahlen gleichzeitig betreffen. Was kann man über die Folge $d(n) := \#\{k \in \mathbb{N}_0 : e_k(f(n)) = e\}$ aussagen, wobei $e > 0$ eine feste Ziffer ist? Wie verhält sich die Quersumme der $f(n)$ asymptotisch bei $n \to \infty$? Wie verhält sie sich im Mittel?

Unser **drittes Problem** behandelt die Anzahl der Fibonacci-Zahlen mit genau k Ziffern:

$$a(k) := \#\{n \in \mathbb{N} : 10^{k-1} \leq f(n) < 10^k\}.$$

Es gilt ([4])

$$a(k) \in \{4, 5\}, \quad \text{falls} \quad k > 1. \tag{2}$$

Beweis. Denn durch Induktion über n sieht man

$$1,6 \cdot f(n-1) \leq f(n) < 1,7 \cdot f(n-1), \quad n > 5.$$

Sei $k > 1$ und $f(n)$ die kleinste Fibonacci-Zahl mit genau k Ziffern; dann ist $n \geq 7$ und

$$\begin{aligned} a(k) &\geq 4, \quad \text{da} \quad f(n+3) < 1,7^4 f(n-1) < 8,36 \cdot 10^{k-1} < 10^k, \\ a(k) &\leq 5, \quad \text{da} \quad f(n+5) \geq 1,6^5 f(n) \geq 10,48 \cdot 10^{k-1} > 10^k. \end{aligned}$$

Damit ist (2) bewiesen.

Wir definieren die Folgen

$$b(k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a(k) = 4, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad c(k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a(k) = 5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt der

Satz 3 *Die Folgen $(a(n))$, $(b(n))$ und $(c(n))$ sind fast-periodisch, aber nicht schließlich-periodisch. Ihre Mittelwerte sind*

$$\begin{aligned} M(a) &= \frac{1}{\log \alpha} = 4,784\ldots, \\ M(b) &= 5 - \frac{1}{\log \alpha} = 0,215\ldots, \\ M(c) &= \frac{1}{\log \alpha} - 4 = 0,784\ldots \end{aligned}$$

(*die Konstante α wurde in* (1) *definiert*).

Bemerkungen

1. Die drei Sätze behandeln die Dezimal-Ziffern der $f(n)$. Ersetzt man die Basis 10 durch eine beliebige Basis $g \geq 2$, so bleiben die Aussagen über Periodizität und Fast-Periodizität erhalten, nur die Perioden und Mittelwerte ändern sich.
2. Die Inhalte der Sätze 1–3 sind teilweise bekannt; ihre Beweise sind jedoch neu, insbesondere war die Fast-Periodizität der betreffenden Folgen bisher unbekannt.

1 Beweis von Satz 1

Es ist $e_0(f(1)) = e_0(f(2)) = 1$, und aus der Tabelle der ersten Fibonacci-Zahlen erkennt man $e_0(f(61)) = e_0(f(62)) = 1$. Hieraus folgt $e_0(f(3)) = e_0(f(63)) = 2$ und durch Induktion $e_0(f(n)) = e_0(f(n+60))$ für alle $n \geq 1$. Also hat die Folge $(r(n))$ die Periode 60. Der Mittelwert ist $M(r) = \frac{1}{60} \sum\limits_{1 \leq n \leq 60} e_0(f(n))$, den man durch Auszählen berechnet. □

2 Beweis von Satz 2

Wir benötigen einen

Hilfssatz *Hat die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Periode 1 und ist $h|[0,1]$ quadrat-integrierbar, so ist die Folge $f(n) := h(\epsilon n)$ fast-periodisch für jedes reelle ϵ.*

Beweis. Ist ϵ rational, etwa $\epsilon = \frac{q}{p}$ mit $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, dann ist $\epsilon(n+p) = \epsilon n + q$, und $f(n)$ hat die Periode p, ist also fast-periodisch.

Sei ϵ irrational. Wir definieren die Fourier-Koeffizienten von h

$$\delta_k := \int_0^1 h(x) e^{-2\pi i k x} dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

und

$$h^{(K)}(x) := \sum_{|k| \leq K} \delta_k e^{2\pi i k x}\,, \quad K \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left\|(h - h^{(K)})(\epsilon n)\right\|_1^2 \leq \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \left|(h - h^{(K)})(\epsilon n)\right|^2.$$

Weil die Folge $(\epsilon n)_{n \geq 1}$ gleichverteilt modulo 1 ist ([3, S. 8]), ist der lim sup gleich $\int_0^1 |h(x) - h^{(K)}(x)|^2 dx$, und das Integral hat nach der Parseval-Gleichung in $L^2[0,1]$ den Wert $\sum\limits_{|k| > K} |\delta_k|^2$. Hieraus erkennt man

$$\lim_{K \to \infty} \|(h - h^{(K)})(\epsilon n)\|_1 = 0$$

und die Fast-Periodizität von $(h(\epsilon n))_{n \geq 1}$. □

Beispiel Seien γ, δ reelle Zahlen, $0 \le \gamma < \delta \le 1$, $x = [x] + \{x\}$ sei die Zerlegung der reellen Zahl x im ganzen und gebrochenen Anteil sowie

$$h_{\gamma,\delta}(x) := \begin{cases} 1 & \gamma < \{x\} < \delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Dann ist die Folge $(h_{\gamma,\delta}(\epsilon n))_{n\ge 1}$ fast-periodisch für jedes reelle ϵ.

Beweis von Satz 2 für den Fall $e = 1$. Zu jedem natürlichen $j \ge 3$ existiert nach (1) ein $n_j \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_j$ gilt

$$\left|\log f(n) - \left(n \log \alpha - \frac{1}{2}\log 5\right)\right| = \left|\log\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)\right| < \frac{1}{j}\,.$$

Die Fibonacci-Zahl $f(n)$ hat genau dann die Leitziffer 1, wenn ein $K \in \mathbb{N}_0$ mit $10^K \le f(n) < 2 \cdot 10^K$, also $K \le \log f(n) < K + \log 2$ existiert. Definiere reelle Zahlen $\gamma := \frac{1}{2}\log 5 = 0,349\ldots$ und $\delta := \frac{1}{2}\log 5 + \log 2 = 0,650\ldots$ Dann impliziert $e_K(f(n)) = 1$, $n > n_j$, die Ungleichung

$$K + \gamma - \frac{1}{j} < n \log \alpha < K + \delta + \frac{1}{j}\,,$$

also mit (3)

$$h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}}(n \log \alpha) = 1\,, \qquad \text{falls } \ \ell(n) = 1\,,\ n > n_j\,. \tag{4}$$

Im anderen Fall $e_K(f(n)) > 1$ gilt $2 \cdot 10^K \le f(n) < 10^{K+1}$, also $K + \log 2 \le \log f(n) < K + 1$. Das impliziert $\{n \log \alpha\} < \gamma + \frac{1}{j}$ oder $\{n \log \alpha\} > \delta - \frac{1}{j}$, also

$$h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}(n \log \alpha) = 0\,, \qquad \text{falls } \ \ell(n) = 0\,,\ n > n_j\,. \tag{5}$$

Wir approximieren nun die Folge $(\ell(n))$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le N} \left|\ell(n) - h_{\gamma,\delta}(n \log \alpha)\right| &= \sum_{\substack{n\le N\\ \ell(n)=1}} (1 - h_{\gamma,\delta}(n \log \alpha)) + \sum_{\substack{n\le N\\ \ell(n)=0}} h_{\gamma,\delta}(n \log \alpha) \\
&\le \sum_{\substack{n\le N\\ \ell(n)=1}} (h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma,\delta})(n \log \alpha) \\
&\qquad + \sum_{\substack{n\le N\\ \ell(n)=0}} (h_{\gamma,\delta} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}})(n \log \alpha) + \mathrm{O}(1) \quad \text{nach (4) und (5)} \\
&\le \sum_{n\le N} \left(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\right)(n \log \alpha) + \mathrm{O}(1)\,.
\end{aligned}$$

Da $\log \alpha$ irrational ist, ist die Folge $(n \log \alpha)_{n\ge 1}$ gleichverteilt mod 1 ([3, S. 8]) und

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} \left(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\right)(n \log \alpha) \\
&\qquad = \int_0^1 \left(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\right)(x)dx = 4\frac{1}{j}\,, \quad j \ge 3.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|\ell(n) - h_{\gamma,\delta}(n\log\alpha)\|_1 = 0$ gezeigt. Weil nach dem Hilfssatz die Folge $(h_{\gamma,\delta}(n\log\alpha))_{n\geq 1}$ fast-periodisch ist, ist auch $\ell(n)$ fast-periodisch.
Nun berechnen wir den Mittelwert von ℓ. Wegen der Gleichverteiltheit mod 1 von der Folge $(n\log\alpha)_{n\geq 1}$ ist

$$M(\ell) = M(h_{\gamma,\delta}(n\log\alpha)) = \int_0^1 h_{\gamma,\delta}(x)dx = \delta - \gamma = \log 2\,.$$

Weil das eine irrationale Zahl ist, kann die Folge ℓ nicht schließlich-periodisch sein (eine schließlich-periodische Folge mit ganzzahligen Werten hat einen rationalen Mittelwert). Damit ist Satz 2 für den Fall $e = 1$ bewiesen. Bei anderen Leitziffern $e > 1$ schließt man in analoger Weise. □

3 Beweis von Satz 3

Ist $k > 1$, dann gilt nach (2)

$$b(k) = 5 - a(k), \quad c(k) = a(k) - 4\,.$$

Somit müssen wir nur die Folge b untersuchen. Sei $j \geq 10$ eine natürliche Zahl. Es ist genau dann $b(k) = 1$, wenn $f(n-3) < 10^{k-1}$ und $f(n+2) \geq 10^k$ für ein $n \geq 4$ gilt. Nach Binets Formel (1) bedeutet das

$$(n-3)\log\alpha - \frac{1}{2}\log 5 - \frac{\log\alpha}{j} < k - 1$$

und

$$k < (n+2)\log\alpha - \frac{1}{2}\log 5 + \frac{\log\alpha}{j}$$

für alle $k > k_j$. Setze $\gamma := \dfrac{1 - \frac{1}{2}\log 5}{\log\alpha} - 3 = 0,112\ldots$ und $\delta := 2 - \dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\log\alpha} = 0,327\ldots$
Dann impliziert $b(k) = 1$, $k > k_j$, die Ungleichung

$$n + \gamma - \frac{1}{j} < \frac{k}{\log\alpha} < n + \delta + \frac{1}{j}\,,$$

also $h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}}\left(\frac{k}{\log\alpha}\right) = 1$. Der andere Fall $b(k) = 0$ bedeutet $10^{k-1} \leq f(n-3)$ und $f(n+1) < 10^k$ für ein $n \geq 4$, also $h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\left(\frac{k}{\log\alpha}\right) = 0$, falls $k > k_j$.

Wir approximieren nun $b(k)$ ähnlich wie im Beweis zu Satz 2:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\leq K}\left|b(k) - h_{\gamma,\delta}\Big(\frac{k}{\log\alpha}\Big)\right| \\
&\leq \sum_{\substack{k\leq K\\ b(k)=1}}\Big(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma,\delta}\Big)\Big(\frac{k}{\log\alpha}\Big) + \sum_{\substack{k\leq K\\ b(k)=0}}\Big(h_{\gamma,\delta} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\Big)\Big(\frac{k}{\log\alpha}\Big) + \mathrm{O}(1) \\
&\leq \sum_{k\leq K}\Big(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}} - h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\Big)\Big(\frac{k}{\log\alpha}\Big) + \mathrm{O}(1)\,,
\end{aligned}$$

falls $j \geq 10$. Da die Zahl $\frac{1}{\log\alpha}$ irrational ist, ist die Folge $\left(\frac{k}{\log\alpha}\right)_{k\geq 1}$ gleichverteilt mod 1 und

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{k\leq K}\left(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}}-h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\right)\left(\frac{k}{\log\alpha}\right)$$
$$=\int_0^1\left(h_{\gamma-\frac{1}{j},\delta+\frac{1}{j}}-h_{\gamma+\frac{1}{j},\delta-\frac{1}{j}}\right)(x)dx=4\frac{1}{j}\,,\quad j\geq 10\,.$$

Damit ist $\left\|b(k)-h_{\gamma,\delta}\left(\frac{k}{\log\alpha}\right)\right\|_1=0$ gezeigt, und nach dem Hilfssatz ist die Folge $(b(k))_{k\geq 1}$ fast-periodisch. Ihr Mittelwert ergibt sich in bekannter Weise:

$$M(b)=\int_0^1 h_{\gamma,\delta}(x)dx=\delta-\gamma=5-\frac{1}{\log\alpha}\,.$$

Weil dies eine irrationale Zahl ist, kann die Folge b nicht schließlich-periodisch sein. □

Bemerkung Die Mittelwert-Formel $M(c)=\frac{1}{\log\alpha}-4$ wurde schon in [1, S. 339] mit einer anderen Methode bewiesen. Kürzlich hat Puchta [4]

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{\substack{k\leq K\\ k\equiv\ell \bmod m}}c(k)=\frac{1}{m}\,M(c)$$

gezeigt. Es existiert eine äquivalente Formel für die Folge b, und diese ergibt sich direkt aus obigem Beweis: Weil auch die Folge $\left(\frac{k}{\log\alpha}\right)_{k\equiv\ell \bmod m}$ gleichverteilt mod 1 ist, folgt

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\sum_{\substack{k\leq K\\ k\equiv\ell \bmod m}}b(k)=\frac{1}{m}\lim_{I\to\infty}\frac{1}{I}\sum_{i\leq I}b(mi+\ell)=\frac{1}{m}\int_0^1 h_{\gamma,\delta}(x)dx=\frac{1}{m}M(b)\,.$$

Literatur

[1] Guthmann, A.: Wieviele k-stellige Fibonaccizahlen gibt es? *Arch. Math.* 59 (1992), 334–340.

[2] Hoggatt, V.E.: *Fibonacci and Lucas numbers*. Boston, Houghton Mifflin, 1969.

[3] Kuipers, L.; Niederreiter, H.: *Uniform distribution of sequences*. New York, John Wiley, 1974.

[4] Puchta, J.-C.: The number of k-digit Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.* 39 (2002), 334–335.

[5] Schwarz, W.; Spilker, J.: *Arithmetical functions*. Cambridge University Press, 1994.

[6] Wall, D.D.: Fibonacci series modulo m. *Amer. Math. Monthly* 67 (1960), 525–532.

Jürgen Spilker
Albert-Ludwigs-Universität
Mathematisches Institut
Abt. Reine Mathematik
Eckerstr. 1
D–79104 Freiburg, Deutschland
e-mail: `Jürgen.Spilker@math.uni-freiburg.de`