# Zum Satz des Ptolemaios

Autor(en): **Stärk, Roland**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8481

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Elem. Math. 58 (2003) 34 – 37
0013-6018/03/010034-4

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

# Zum Satz des Ptolemaios

Roland Stärk

Roland Stärk studierte an der ETH Zürich. Nach der Promotion zum Dr. sc. math. war er von 1964–1997 Gymnasiallehrer an der Kantonsschule Schaffhausen.

Beim Kreissehnenviereck $ABCD$ der Fig. 1 sind die Winkel $ACB$ und $ADB$ bekanntlich gleich gross. Hat ein Viereck $ABCD$ keinen Umkreis, so sind diese Winkel verschieden.

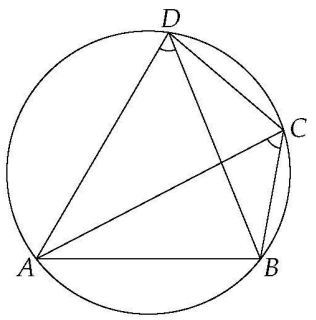


Fig. 1

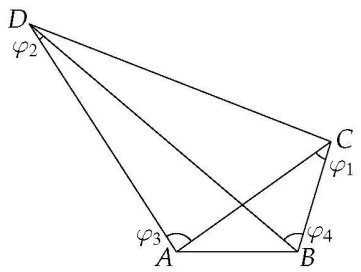


Fig. 2

Es stellt sich die etwas vage Frage, ob bei der Fig. 2 die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ das Viereck irgendwie beschreibt. Sicher gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$, wie man sofort sieht.

Um im Folgenden zu einem allgemeingültigen Resultat zu kommen, unabhängig von der jeweiligen Anordnung der Ecken des (allgemeinen) Vierecks, sollen Winkel konsequent

In neuerer Zeit wird die Elementargeometrie vermehrt mit Computerhilfsmitteln bearbeitet, die auch an den Schulen Einzug halten. Die vorliegende Arbeit will am Beispiel des Satzes des Ptolemaios über das Kreissehnenviereck zeigen, wie ein klassisches Problem mit Hilfe eines Computerkonstruktionsprogramms und eines Computeralgebrasystems behandelt und beinahe spielerisch gelöst werden kann. Gearbeitet wird mit einem für Vierecksuntersuchungen günstigen Koordinatensystem, das sich schon an anderer Stelle bewährt hat.

orientiert, modulo 180° gemessen werden. Mit $\angle PQR$ ist der Winkel gemeint, um den die Gerade $QP$ um $Q$ gedreht werden muss, bis sie in die Gerade $QR$ übergeht, im Gegenuhrzeigersinn positiv, im Uhrzeigersinn negativ gerechnet und modulo 180° reduziert. Dieser Winkelbegriff hat den grossen Vorteil, dass z.B. in der Fig. 1 die Ecken $C$ und $D$ auch auf verschiedenen Seiten der Sehne $AB$ eingezeichnet sein können. Es gilt auch in diesem Falle $\angle ACB = \angle ADB$. Wir schreiben das gewöhnliche Gleichheitszeichen. Oder bei einem geschlossenen Streckenzug $P_1P_2P_3P_4 \ldots P_nP_1$ mit $n$ Strecken gilt, unabhängig von der geometrischen Anordnung, $\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 + \ldots + \angle P_nP_1P_2 = 0$. Das ist der Satz über die Winkelsumme im $n$–Eck („Dass diese ein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist").

In der Fig. 2 sieht man den Vierstreckenzug $ACBDA$. Also $\angle ACB + \angle CBD + \angle BDA + \angle DAC = 0$. Daraus ergibt sich, wegen $\angle BDA = -\angle ADB$ usw., $\angle ACB - \angle ADB = \angle CAD - \angle CBD$, wie oben festgestellt. Wir nennen die Differenz

$$\delta_1 = \angle ACB - \angle ADB$$

einen *Differenzwinkel* des Vierecks $ABCD$. Zum Viereck gehören mehrere solche Differenzwinkel (der Form „$\angle XUY - \angle XVY$"). Zu $\delta_1$ nehmen wir noch $\delta_2 = \angle BAC - \angle BDC$ und $\delta_3 = \angle CBA - \angle CDA$ hinzu, man sieht gleich warum.

Bei der Fig. 2 z.B. misst man (genau gedruckte Wiedergabe der ursprünglichen Vorlage vorausgesetzt): $\delta_1 = 40° - 17° = 23°$, $\delta_2 = 37° - 19° = 18°$, $\delta_3 = 103° - (-36°) = 139°$. Etwas überrascht stellt man fest, dass $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$ ist.

Es lohnt sich, so etwas auch mit dem Computer-Konstruktionsprogramm CABRI [1] zu überprüfen. (Man wird in diesem Fall zuerst selber noch eine Prozedur für die orientierte Winkelmessung machen.) Weil bei Cabri die Ausgangsfiguren variiert werden können, erhält man oft schnell einen viel besseren Einblick in geometrische Zusammenhänge und wird immer wieder zu neuen Ideen angeregt.

Der Beweis hier ist aber ganz einfach. Man betrachte die Streckenzüge $ACBA$ und $ADBDCDA$. Sie liefern die Gleichungen

$$\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 0\,,$$
$$\angle ADB + 0 + \angle BDC + 0 + \angle CDA + 0 = 0\,.$$

Daraus ergibt sich die Formel oben.

Um den Sachverhalt weiter zu verfolgen, führen wir ein günstiges (Cartesisches) Koordinatensystem ein. Als Koordinatenachsen nimmt man bei einer Vierecksuntersuchung am besten die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, die durch die vier Ecken gelegt werden kann. Bei geeigneter Wahl der Koordinateneinheit ergibt sich für die Ecken $A$, $B$, $C$, $D$ dann der Ansatz

$$A\left(a, \frac{1}{a}\right), \quad B\left(b, \frac{1}{b}\right), \quad C\left(c, \frac{1}{c}\right), \quad D\left(d, \frac{1}{d}\right).$$

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die vier Ecken jeweils mit gleichem Gewicht in Erscheinung treten können. Für das Quadrat der Seite $AB$, zum Beispiel, ergibt sich

$$\overline{AB}^2 = \frac{(b-a)^2(1+a^2b^2)}{a^2b^2}\,.$$

Damit sind auch die Quadrate der fünf anderen Seiten bekannt: $\overline{CD}^2 = \frac{(d-c)^2(1+c^2d^2)}{c^2d^2}$ ..., es müssen nur die Koordinaten $a$, $b$, $c$, $d$ passend vertauscht werden.

Wie man mit diesem Koordinatensystem interessante Vierecksuntersuchungen machen kann und heutzutage mit Hilfe eines Computer-Algebrasystems, z.B. Mathematica [5], umfangreiche Berechnungen erfolgreich durchführt, zeigt [4].

Dass durch die Ecken eines Vierecks eine gleichseitige Hyperbel gelegt werden kann – dies sei noch nachgetragen – folgt z.B. aus dem Satz: „Jeder einem (nichtrechtwinkligen) Dreieck umschriebene Kegelschnitt, der durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks läuft, ist eine gleichseitige Hyperbel" [2]. Die Vierecksecken zusammen mit dem Höhenschnittpunkt eines der Teildreiecke des Vierecks legen die gesuchte Gleichseithyperbel fest. (Sollten alle vier Teildreiecke rechtwinklig sein, bei einem Rechteck also, ist die Existenz zum vornherein klar.)

Es ist nun

$$\tan(\angle ACB) = \frac{(b-a)c}{1+abc^2}, \quad \tan(\angle ADB) = \frac{(b-a)d}{1+abd^2}.$$

Das Additionstheorem liefert

$$\tan(\delta_1) = \frac{(b-a)(d-c)(abcd-1)}{1+abc^2+a^2cd-2abcd+b^2cd+abd^2+a^2b^2c^2d^2}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für $\delta_2$ und $\delta_3$. Mit dem Computer lässt sich sofort nachweisen, dass $\tan(\delta_1+\delta_2) = -\tan(\delta_3)$ ist, womit $\delta_1+\delta_2+\delta_3 = 0$ auch auf diesem Wege bewiesen ist.

Das Verschwinden dieser Summe bedeutet, dass sich mit diesen drei Differenzwinkeln ein Dreieck $P_1P_2P_3$ bilden lässt (in beliebiger Grösse), mit

$$\angle P_2P_1P_3 = \delta_1, \quad \angle P_3P_2P_1 = \delta_2, \quad \angle P_1P_3P_2 = \delta_3.$$

Um die Gestalt dieses Dreiecks deutlicher zu sehen, wird man, im Hinblick auf den sinus-Satz, vielleicht automatisch noch die sinus-Werte der Eckwinkel berechnen:

$$\sin^2(\delta_1) = \frac{\tan^2(\delta_1)}{\tan^2(\delta_1)+1} = \frac{(b-a)^2(d-c)^2(abcd-1)^2}{(1+a^2c^2)(1+b^2c^2)(1+a^2d^2)(1+b^2d^2)}.$$

Das ist die Überraschung. Eine so schöne Faktorzerlegung weist in der Regel auf weitergehende Zusammenhänge hin. Hier denkt man an die oben berechneten Quadrate der Vierecksseiten. Tatsächlich gilt

$$\frac{\sin^2(\delta_1)}{\sin^2(\delta_2)} = \frac{(b-a)^2(d-c)^2(1+a^2b^2)(1+c^2d^2)}{(c-b)^2(d-a)^2(1+b^2c^2)(1+a^2d^2)} = \frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}^2}{\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}^2},$$

$$\frac{|\sin(\delta_1)|}{|\sin(\delta_2)|} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}.$$

Die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind proportional zu den Gegenseitenprodukten des Vierecks $ABCD$.

Die Idee, einem Viereck dieses Dreieck zuzuordnen, stammt nach [3] von C.A. Bretschneider.

**Satz:** *Die drei Differenzwinkel*

$$\delta_1 = \angle ACB - \angle ADB\,, \quad \delta_2 = \angle BAC - \angle BDC\,, \quad \delta_3 = \angle CBA - \angle CDA$$

*(orientierte Winkel modulo* $180^\circ$*) eines allgemeinen Vierecks* $ABCD$ *lassen sich zu einem Dreieck* $P_1P_2P_3$ *(beliebiger Grösse) zusammensetzen, mit* $\angle P_2P_1P_3 = \delta_1$, $\angle P_3P_2P_1 = \delta_2$, $\angle P_1P_3P_2 = \delta_3$. *Die Seiten dieses Dreiecks sind proportional zu den Gegenseitenprodukten des Vierecks:*

$$\overline{P_2P_3} \;:\; \overline{P_3P_1} \;:\; \overline{P_1P_2} = (\overline{AB}\cdot\overline{CD}) \;:\; (\overline{AD}\cdot\overline{BC}) \;:\; (\overline{AC}\cdot\overline{BD}).$$

Beim Grenzfall des Kreissehnenvierecks sind die drei Differenzwinkel gleich Null, das Dreieck $P_1P_2P_3$ entartet, die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ sind kollinear. Das bedeutet:

Wenn ein Viereck einen Umkreis hat, dann ist eines seiner Gegenseitenprodukte gleich der Summe der beiden andern und umgekehrt. Das ist der berühmte Satz des *Ptolemaios*.

## Literatur


[1] Laborde, J.-M.; Bellemain, F.: Cabri-Géomètre II, Texas Instruments France.

[2] Pickert, G.: Gleichseitige Hyperbel und Parabeln durch vier Punkte. *Praxis der Mathematik*, PM 40 (1998) 277–279 und 279f.

[3] Simon, M.: *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im* XIX. *Jahrhundert*, p. 159. Teubner, Leipzig 1906.

[4] Stärk, R.; Baumgartner, D.: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. *Praxis der Mathematik*, PM 44 (2002) 19–27.

[5] Wolfram, S.: *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.



Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH–8234 Stetten, Schweiz
e-mail: `roland.staerk@freesurf.ch`