Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 58 (2003) 38 – 42
0013-6018/03/010038-5

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 2003 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

An diese Adresse sind auch Aufgabenvorschläge zu senden; momentan herrscht ein Mangel an neuen Aufgaben.

Aufgabe 1190: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine wachsende differenzierbare Funktion. Beweise, dass

$$\sum_{\ell=1}^{n} \int_0^{nx_\ell-(x_1+x_2+\cdots+x_n)} f\Big(x_\ell - \frac{t}{n-1}\Big)\,\mathrm{d}t \geq 0,$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ beliebige reelle Zahlen sind.

Miháli Bencze, Sacele, RO

Aufgabe 1191: Bei gegebenen verschiedenen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und beliebig vorgegebenen Zahlen $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ soll für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n\,*} x_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot c_{i_3} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} = (-1)^{k-1} p_{n-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgelöst werden, wenn das für $k = 1$ auftretende leere Produkt 1 gesetzt wird und die mit $*$ bezeichnete Summation auf voneinander verschiedene Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ und $i_2 < i_3 < \cdots < i_k$ beschränkt wird.

Wie lautet die Lösung für die spezielle Wahl $c_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $p_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1192 (Die einfache dritte Aufgabe): Zeige, dass die natürlichen Zahlen a_n, deren Quadrate Dreieckszahlen sind, für $n \to \infty$ gegen eine geometrische Folge streben.

Rolf Rose, Magglingen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2002

Aufgabe 1178. Jedes der $m \cdot n$ Einheitsquadrate eines $m \times n$-Rechtecks wird schwarz oder weiss gefärbt. Zwei Färbungen gelten als äquivalent, wenn sie durch Achsen- oder Punktspiegelung oder durch Farbentausch auseinander hervorgehen. Man bestimme die Anzahl der verschiedenen Muster (Äquivalenzklassen).

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Lösungen oder Teillösungen eingetroffen: Bernhard Heilmann (Köln, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

François Sigrist und *Roland Wyss* arbeiten – wie der Autor der Aufgabe – mit dem Lemma von Burnside, wobei *François Sigrist* die dem Problem besser angepasste Variante mit dem Satz von Pólya-de Bruijn benutzt. *Bernhard Heilmanns* Überlegungen sind elementarer, benützen aber das Burnside-Lemma indirekt auch.

Wir folgen den Überlegungen des Autors: Es sei $R = \{1, 2, \ldots, mn\}$ die Menge der (irgendwie numerierten) Einheitsquadrate, und $F = \{s, w\}$ bezeichne die Farbenmenge. Eine Färbung ist eine Abbildung $\varphi : R \to F$. Es sei Φ die Menge der 2^{mn} Färbungen. Die Symmetriegruppe $G = \{e, v, h, p\}$ des Rechtecks induziert auf R eine Permutationsgruppe $\overline{G} = \{\overline{e}, \overline{v}, \overline{h}, \overline{p}\}$. Mit e wird dabei die Identität, mit v die Spiegelung an der vertikalen Symmetrieachse, mit h die Spiegelung an der horizontalen Symmetrieachse bezeichnet, und p steht für die Punktspiegelung. $A = \{i, a\}$ sei die Permutationsgruppe auf F; dabei steht i für die Identität und a für den Farbentausch. Wir benötigen später die Zyklenstrukturen der Permutationen von $\overline{G}$; in der folgenden Tabelle steht E für Einer- und Z für Zweierzyklen:

	m, n gerade	m gerade, n ungerade	m ungerade, n gerade	m, n ungerade
$\overline{e}$	mn E	mn E	mn E	mn E
$\overline{h}$	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}(m-1)n$ Z, n E	$\frac{1}{2}(m-1)n$ Z, n E
$\overline{v}$	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}m(n-1)$ Z, m E	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}m(n-1)$ Z, m E
$\overline{p}$	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}mn$ Z	$\frac{1}{2}(mn-1)$ Z, 1 E

Mit $\varphi \in \Phi$, $x \in \overline{G}$, $y \in A$ ist auch $\psi = y\varphi x$ eine Färbung $\psi \in \Phi$. Für feste x, y ist $f_{x,y} : \Phi \to \Phi$ mit $f_{x,y}(\varphi) = \psi = y\varphi x$ eine Permutation von Φ. Die acht so definierten Permutationen bilden mit der Verkettung $f_{x',y'} f_{x,y} = f_{xx',y'y}$ eine Permutationsgruppe H von Φ. Die gesuchte Anzahl $M(m, n)$ der Muster ist gleich der Anzahl der von H in Φ erzeugten Bahnen. Mit dem Lemma von Burnside erhält man

$$M(m, n) = \frac{1}{8} \sum_{\substack{x \in \overline{G} \\ y \in A}} \chi(f_{x,y}),$$

wobei $\chi(f_{x,y})$ die Anzahl der Fixelemente von $f_{x,y}$ bedeutet.

Für die vier Permutationen $f_{x,i}$ gilt $\varphi = i\varphi x$ genau dann, wenn man die Zyklen von x monochromatisch färbt; für die vier Permutationen $f_{x,a}$ gilt $\varphi = a\varphi x$ genau dann, wenn x nur aus Zweierzyklen besteht und diese bichromatisch gefärbt werden. Damit erhält man schliesslich für die vier Fälle gemäss obiger Tabelle

$$M(m,n) = \begin{cases} 1/8(2^{mn} + 6 \cdot 2^{mn/2}) & : \ m, n \text{ gerade}, \\ 1/8(2^{mn} + 4 \cdot 2^{mn/2} + 2^{m(n+1)/2}) & : \ m \text{ gerade}, \ n \text{ ungerade}, \\ 1/8(2^{mn} + 4 \cdot 2^{mn/2} + 2^{n(m+1)/2}) & : \ m \text{ ungerade}, \ n \text{ gerade}, \\ 1/8(2^{mn} + 2^{n(m+1)/2} + 2^{m(n+1)/2} + 2^{(mn+1)/2}) & : \ m, n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Diese Ergebnisse sind nur richtig, wenn $n \neq m$. *Roland Wyss* erhält für den Fall des Quadrates mit ungerader Seitenlänge m das Ergebnis

$$M(m,m) = \frac{1}{16}\left(2^{m^2} + 4 \cdot 2^{(m^2-1)/4} + 2 \cdot 2^{(m^2-1)/2} + 4 \cdot 2^{(m^2+m)/2}\right).$$

Für den Fall des Quadrates mit gerader Seitenlänge ist keine Lösung eingegangen.

Aufgabe 1179. ℓ Gefässe sind kreisförmig aufgestellt; eines enthält V_1 Liter Alkohol, die übrigen enthalten $V_2, V_3, \ldots, V_\ell$ Liter Wasser. Beginnend mit dem Alkohol enthaltenden Gefäss werden nun mit einem Löffel a Liter Flüssigkeit ($a \leq V_1$) reihum von einem Gefäss ins nächste geleert, wobei jeweils gut umgerührt wird. Dieser Umfüllprozess wird beliebig fortgesetzt. Wie wird sich der Alkohol langfristig auf die ℓ Gefässe verteilen?

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen der von der Redaktion gekürzten Lösung von *Joachim Klose:* Es bezeichne $\alpha_i^{(j)} \cdot V_i$ den aus Alkohol bestehenden Teil der im i-ten Gefäss vorhandenen Flüssigkeitsmenge, nachdem aus jedem Gefäss genau j-mal Flüssigkeit entnommen und wieder zugefügt worden ist. Dann ist $(1 - \alpha_i^{(j)}) \cdot V_i$ die Wassermenge im Gefäss i zum gleichen Zeitpunkt. Man erhält nach einiger Rechnung die für $j \geq 0$ gültige Rekursionsformel

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(j+1)} &= \frac{V_2}{V_2 + a} \cdot \alpha_2^{(j)} + \frac{a}{V_2 + a} \cdot \alpha_1^{(j)}, \\ \alpha_i^{(j+1)} &= \frac{V_i}{V_i + a} \cdot \alpha_i^{(j)} + \frac{a}{V_i + a} \cdot \alpha_{i-1}^{(j+1)} \quad \text{für } 3 \leq i \leq \ell, \\ \alpha_1^{(j+1)} &= \frac{V_1 - a}{V_1} \cdot \alpha_1^{(j)} + \frac{a}{V_1} \cdot \alpha_\ell^{(j+1)}, \end{aligned} \tag{1}$$

mit den Startwerten $\alpha_1^{(0)} = 1$, $\alpha_i^{(0)} = 0$ für $2 \leq i \leq \ell$.

Um zu klären, ob die Folgen $(\alpha_i^{(j)})$ für $j \to \infty$ konvergieren, beschreiben wir den Übergang vom Spaltenvektor

$$\alpha^{(j)} = (\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(j)}, \ldots, \alpha_\ell^{(j)})^T \quad \text{zu} \quad \alpha^{(j+1)} = (\alpha_1^{(j+1)}, \alpha_2^{(j+1)}, \ldots, \alpha_\ell^{(j+1)})^T$$

durch eine Matrixgleichung

$$\alpha^{(j+1)} = P\alpha^{(j)},$$

wobei die Matrix P stochastisch ist, also alle Zeilensummen 1 sind und keine negativen Matrixelemente auftreten. Dazu setzen wir $p_{21} = a/(V_2 + a)$, $p_{22} = V_2/(V_2 + a)$, die übrigen Elemente der zweiten Zeile sollen verschwinden. Die Zeilensumme ist 1, und es gilt $p_{21}\alpha_1^{(j)} + p_{22}\alpha_2^{(j)} = \alpha_2^{(j+1)}$. Nachdem die zweite Zeile besetzt ist, füllen wir nun die Matrix zeilenweise von oben nach unten auf:

$$\begin{aligned} p_{i+1,k} &= \frac{a}{V_{i+1} + a} \cdot p_{ik} && \text{für } k = 1, 2, \ldots, i, \\ p_{i+1,i+1} &= \frac{V_{i+1}}{V_{i+1} + a}, \\ p_{i+1,k} &= 0 && \text{für } k = i+2, i+3, \ldots, \ell. \end{aligned}$$

Die erste Zeile schliesslich ergibt sich durch $p_{11} = (V_1 - a)/V_1 + p_{\ell 1} \cdot a/V_1$ und $p_{1k} = p_{\ell k} \cdot a/V_1$ für $k = 2, 3, \ldots, \ell$. Man rechnet nach, dass die Matrix P die gewünschte Eigenschaft hat. Zudem besitzt die Matrix P^2 lauter positive Elemente. Die Theorie der stochastischen Matrizen garantiert nun, dass die Folge der Matrixpotenzen (P^n) für $n \to \infty$ gegen eine Grenzmatrix P_0 konvergiert. Die Theorie gibt auch Auskunft über die Gestalt der Grenzmatrix, aber nachdem nun die Konvergenz der Folgen $(\alpha_i^{(j)})$ gesichert ist, lässt sich der Grenzwert einfacher aus dem Rekursionsschema (1) ablesen. Geht man dort zu den Grenzwerten für $j \to \infty$ über, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{V_i}{V_i + a} \cdot \alpha_i + \frac{a}{V_i + a} \cdot \alpha_{i-1} && \text{für } 2 \le i \le \ell, \\ \alpha_1 &= \frac{V_1 - a}{V_1} \cdot \alpha_1 + \frac{a}{V_1} \cdot \alpha_\ell, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $a \neq 0$ ergibt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_\ell$. Weil die Gesamtmenge des Alkohols beim Umschütten unverändert bleibt, gilt für alle j

$$V_1 = \alpha_1^{(j)} \cdot V_1 + \alpha_2^{(j)} \cdot V_2 + \cdots + \alpha_\ell^{(j)} \cdot V_\ell,$$

und im Grenzwert

$$V_1 = \alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \cdots + \alpha_\ell \cdot V_\ell = \alpha(V_1 + V_2 + \cdots + V_\ell),$$

also

$$\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2 + \cdots + V_\ell}.$$

Auf lange Sicht wird sich also der Alkohol so auf die Gefässe verteilen, dass das Gefäss i die Alkoholmenge

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2 + \cdots + V_\ell} \cdot V_i$$

enthält.

Aufgabe 1180 (Die einfache dritte Aufgabe). Es seien H der Höhenschnittpunkt und M_b der Mittelpunkt der Seite AC im Dreieck ABC. Die durch H gehende Normale der Geraden HM_b schneide die Seiten AB in E und BC in F. Zeige, dass H die Strecke EF halbiert.

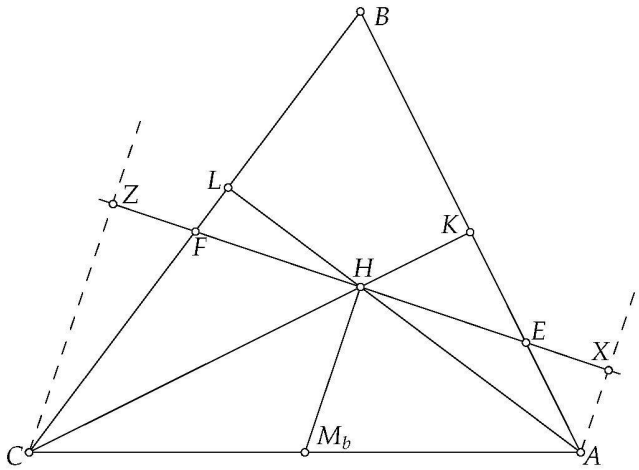
Oleg Faynshteyn, Borsdorf, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIS), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Ignace Morand (Préverenges, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Die meisten Einsender lösen die Aufgabe analytisch. Die eleganteste Lösung stammt von *Albert Ghenzi:* Die neuen Linien AX und CZ sind parallel zu M_bH, also senkrecht zu EF. Da M_b der Mittelpunkt von AC ist, gilt auch $\overline{XH} = \overline{ZH}$, also

$$\overline{AH} \cdot \cos(\angle AHE) = \overline{CH} \cdot \cos(\angle EHK). \tag{1}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\frac{\overline{EF}}{\overline{FH}} &= \frac{\overline{KH}/\cos(\angle EHK)}{\overline{LH}/\cos(\angle AHE)} = \frac{\overline{KH} \cdot \cos(\angle AHE)}{\overline{LH} \cdot \cos(\angle EHK)} \\ &= \frac{\overline{AH} \cdot \cos(\angle AHK) \cdot \cos(\angle AHE)}{\overline{CH} \cdot \cos(\angle AHK) \cdot \cos(\angle EHK)} \\ &= \frac{\overline{AH} \cdot \cos(\angle AHE)}{\overline{CH} \cdot \cos(\angle EHK)} = 1 \qquad \text{wegen (1).}\end{aligned}$$

Also ist $\overline{EH} = \overline{FH}$.