Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 59 (2004)

Artikel: Elementare Beweise des Satzes von Morley
Autor: Wanner, Gerhard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9317

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 59 (2004) 144 – 150
0013-6018/04/040144-7
DOI 10.1007/s00017-003-0194-z

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Elemente der Mathematik

Elementare Beweise des Satzes von Morley

Gerhard Wanner

Gerhard Wanner, geboren 1942 in Innsbruck, unterrichtet seit 1973 an der Universität Genf. Sein hauptsächliches Arbeitsgebiet (in enger Zusammenarbeit mit Ernst Hairer) ist die numerische Lösung von Differentialgleichungen. Darüber hinaus gibt er auch gerne Einführungsvorlesungen über Analysis und Geometrie.

Une démonstration élémentaire de ce théorème n'est pas facile.
(J. Marchand, *L'Ens. Math.* XXIX (1930), p. 291)

La méthode de Morley ressortissant à une géométrie analytique du plan de la variable complexe, on s'empressa ... de rechercher une démonstration aussi courte et aussi élégante que l'énoncé ... A mon avis, de tels désirs ne sauraient être satisfaits.
(H. Lebesgue, *L'Ens. Math.* XXXVIII (1939), p. 39)

Morley's theorem is startling, difficult to prove, and utterly beautiful.
(W. Dunham, *Euler, the master of us all.* Math. Ass. Amer. 1999)

... pour apprécier le théorème, il est bon d'essayer soi-même des démonstrations géométriques, ou même trigonométriques, avant de lire ce qui suit.
(M. Berger, *Géométrie* I, 1990)

Der elegante Satz von Morley über die Winkeldreiteilenden eines Dreiecks entwickelt sich langsam zu einem „must" des Geometrieunterrichts. Die vorliegende Arbeit schliesst sich an den Artikel [4] der Elemente an, in welchem ein auf den komplexen Zahlen beruhender Beweis von Alain Connes vorgestellt wurde. Wir interessieren uns hier für möglichst elementare Beweise, alte und neue, für diesen Satz. Wir stossen dabei noch auf weitere prominente Namen des letzten Jahrhunderts: Henri Lebesgue, Roger Penrose und John Conway. Recht erstaunlich für einen Satz, den der Entdecker ursprünglich gar nicht veröffentlichen wollte.

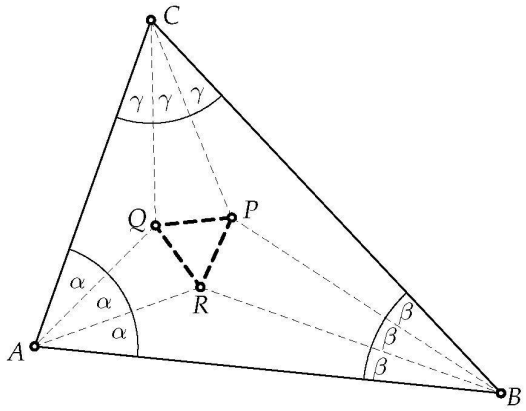

Fig. 1 Der Satz von Morley

Satz. *Für jedes Dreieck ABC ist das Dreieck PQR, welches durch die Schnittpunkte der Winkeldreiteilenden von ABC gebildet wird (siehe Fig. 1), ein gleichseitiges Dreieck.*

Dieser elegante und überraschende Satz, der inzwischen auch „Morley's Miracle" heisst, ist mehr als 100 Jahre alt[1]. Bereits die erste Veröffentlichung [7] enthält drei Beweise, von denen der dritte auf trigonometrischem Wege die Formel

$$QR = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \qquad (r = \text{Umkreisradius})$$

herleitet, welche später „Formel von Kowalewski" heissen wird, und deren Symmetrie die Gleichheit aller drei Seiten nach sich zieht. Dieser Beweis wird das Jahrhundert hindurch der am häufigsten gegebene sein, insbesondere im oben zitierten Buch von M. Berger. Andere Beweise benützen Eigenschaften der komplexen Zahlenebene, wie zum Beispiel der Beweis von A. Connes, welcher kürzlich den Lesern der *Elemente der Mathematik* durch den Artikel von Hansjörg Geiges [4] vorgestellt wurde.

Der Satz hatte das 20. Jahrhundert hindurch den Mythos, nur schwer zu beweisen zu sein (siehe Zitate). Wir interessieren uns hier für die Möglichkeiten, diesen Satz möglichst elementar zu beweisen. Wir werden dabei häufig auf den Satz über die Winkelsumme im Dreieck (Euklid I.32) und auf den Satz über Zentrums- und Peripheriewinkel im Kreis (Euklid III.20) verweisen (etwa [3], Vol. I, S. 316, Vol. II, S. 46).

Der hier vorgeschlagene Beweis. Die Hauptschwierigkeit der üblichen Beweise besteht darin, dass die Form, Lage und Grösse des Dreieckes PQR völlig unbekannt ist und dass die schönen Eigenschaften eines gleichseitigen Dreieckes erst dann benützbar wären, wenn man sie nicht mehr braucht. Daher operieren die einfachsten Beweise *rückwärts*,

1) Die Angaben der Literatur pendeln zwischen 1899 und 1904; die erste Zahl scheint aus der Angabe „some 14 years ago" aus [7] extrapoliert zu sein; die Jahreszahl 1904 stammt aus einem Brief von F. Morley selbst, welcher in einer Fussnote der Arbeit von G. Loria, *Math. Gazette* 23 (1939), S. 367, abgedruckt ist.

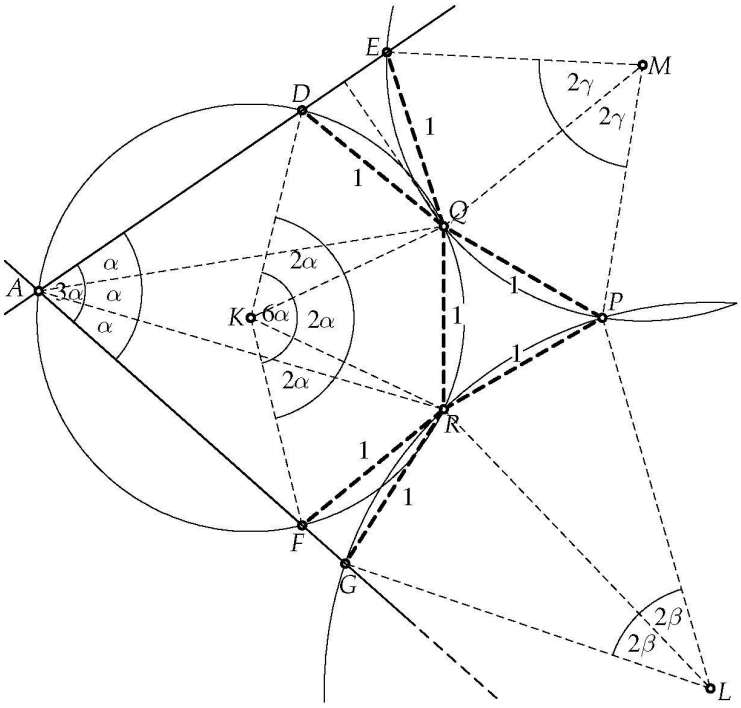

Fig. 2 Erster Beweis des Satzes von Morley

d.h. man merkt sich von dem Dreieck ABC der Fig. 1 nur die Winkel α, β und γ, welche

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \tag{1}$$

erfüllen (Euklid I.32), plaziert ein gleichseitiges Dreieck PQR der Seitenlänge 1 nach Belieben (etwa so, dass die Seite RQ senkrecht steht; siehe Fig. 2) und rekonstruiert ein Dreieck, das wir wieder ABC nennen, und das zum ursprünglichen Dreieck ähnlich ist. Wegen der Eindeutigkeit des Morleyschen Dreieckes ist dieser, an und für sich, „logische Unsinn" durchaus gerechtfertigt.

Über jeder Seite dieses Dreieckes ziehen wir drei Kreise mit Zentren K, L, M und Zentrumswinkel 2α, 2β und 2γ. Dann tragen wir die vier Sekanten QD, QE, RF und RG, alle auch mit der Länge 1, auf. Dadurch haben wir in jedem Kreis gleiche Zentriwinkel.

Das „Wunder" ist nun (denn ein Wunder muss ja sein), dass der Schnittpunkt A der beiden Geraden ED und GF auf der Kreisperipherie liegt. Um das zu zeigen, benützen wir, dass das Dreieck DQE gleichschenklig ist. Die Strecke DQ entsteht aus der Strecke QR, wenn man sie um den Winkel 2α um K herum dreht. Deshalb bildet sie mit der positiven horizontalen Achse den Winkel $90^\circ + 2\alpha$. Ähnlich bildet die Strecke EQ (entstanden aus QP durch Drehung in die andere Richtung) den Winkel $150^\circ - 2\gamma$. Die Winkelsymmetrale DQE besitzt also den Winkel $120^\circ + \alpha - \gamma$ (arithmetisches

Mittel), so dass die Gerade DE, welche darauf senkrecht steht, den Neigungswinkel $30^\circ + \alpha - \gamma$ hat. Ebenso besitzt die Strecke FG einen Neigungswinkel von $30^\circ + \alpha - \beta$ (negativ gemessen). Somit ist der Winkel, den die Geraden DE und FG einschliessen (die Summe der beiden)

$$60^\circ + 2\alpha - \gamma - \beta = 3\alpha,$$

wobei (1) benutzt wurde. Da der Zentrumswinkel FKD genau das Doppelte, nämlich 6α ist, folgt die Behauptung aus Euklid III.20, in umgekehrter Richtung angewendet. Damit sind nach Euklid III.20, jetzt in normaler Richtung angewendet, die Winkel FAR, RAQ und QAD alle gleich α.

Dieselbe Konstruktion der Punkte B und C liefert schliesslich das gesuchte Dreieck ABC mit den gewünschten Eigenschaften. □

Die Variante von Ch. Aebi (2003, pers. Mitteilung). Wenn die Punkte A, B und C beliebig auf den Kreisen gewählt werden, erhält man ein Neuneck $AFGB\ldots EDA$. Dann berechnet man den Winkel $\widehat{QDE}$ mit $120^\circ - \alpha - \gamma = 60^\circ + \beta$. Das Polygon $ARQD$ ist ein Sehnenviereck, somit ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180° (Euklid III.22). Es wird also der Winkel in D gestreckt, falls A so gewählt ist, dass auch der Winkel $\widehat{ARQ} = 60^\circ + \beta$ ist. Das ist aber gleichbedeutend mit $\widehat{RQA} = 60^\circ + \gamma$, d.h. mit der Streckung des Winkels in F. Verfahren wir genauso bei B und C, so wird schliesslich aus dem Neuneck ein Dreieck. □

Der Beweis von J. Conway. Dieser „undisputedly simplest proof", welcher ab 1995 im Internet verbreitet wurde (siehe http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/), definiert sieben abstrakte Dreiecke über ihre Winkel wie folgt

$$\begin{array}{ccccccc} PQR & ARQ & RBP & QPC & PBC & AQC & ABR \\ 0^*, 0^*, 0^*, & \alpha, \beta^*, \gamma^*, & \alpha^*, \beta, \gamma^*, & \alpha^*, \beta^*, \gamma, & \alpha^{**}, \beta, \gamma, & \alpha, \beta^{**}, \gamma, & \alpha, \beta, \gamma^{**}, \end{array} \tag{2}$$

wobei „x^*" für „$x + 60^\circ$" steht. Diese Dreiecke werden dann geschickt skaliert; das erste beliebig (etwa mit Seitenlänge 1), die nächsten drei so, dass $RQ = 1$, $RP = 1$ und $QP = 1$, und die letzten drei so, dass etwa $RG = 1$ (wobei RFG ein mit vorgeschriebenen Winkeln eingefügtes gleichschenkliges Dreieck ist). Dann wird für alle Winkel und alle Seiten nachgerechnet, dass sie schön zusammenpassen. Im Grunde genommen ist der obige Beweis zu diesem hier äquivalent, nur dass die Grössen völlig anders herauskommen.

Der Beweis von Penrose und Coxeter. Wir verlängern die Winkeldreiteilenden über die Punkte P, Q, R hinaus und erhalten drei weitere Schnittpunkte U, V, W (siehe Fig. 3).

Nun bestand die Hauptschwierigkeit des *zweiten* Beweises in [7] gerade darin, sehr mühevoll zu zeigen, dass die Dreiecke QWP, PVR und RUQ gleichschenklig sind. Der Beweis von Penrose (siehe [6]), etwas vereinfacht in Coxeter [2][2)], geht *rückwärts* von

2) Coxeter stellt Penrose, welcher bei der Abfassung dieses Beweises 22 Jahre alt war, folgendermassen vor: „Roger Penrose is a son of Professor Lionel Penrose the genetist, and a brother of Jonathan Penrose the chess champion". Inzwischen braucht *Sir* Roger Penrose so eine Einführung nicht mehr.

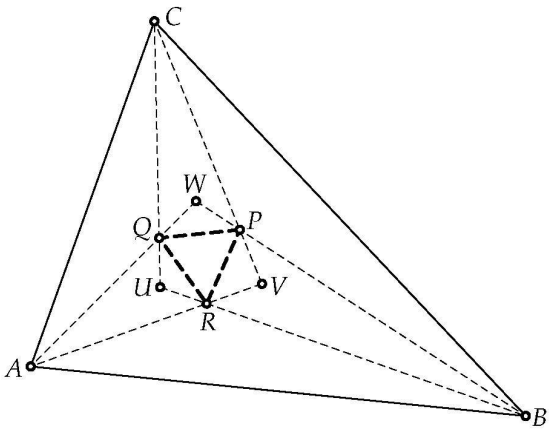

Fig. 3 Beweis von Penrose

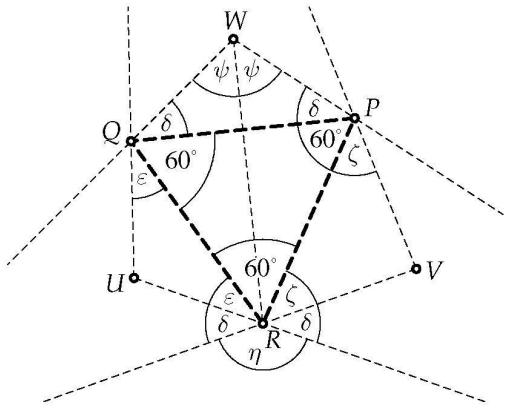

Fig. 4 Beweis von Coxeter

einem gleichseitigen Dreieck PQR aus, und setzt diesem drei gleichschenklige Dreiecke auf (siehe Fig. 4), mit beliebigen Basiswinkeln δ, ϵ und ζ, welche nur

$$\delta + \epsilon + \zeta = 120^\circ \tag{3}$$

erfüllen sollen. Die verlängerten Scheitellinien dieser Dreiecke schneiden sich dann in den Punkten A, B und C. Der Punkt R liegt trivialerweise auf der Winkelsymmetralen von AWB. Wegen (3) wiederholen sich die Winkel δ um den Punkt R herum. Wenn man dann die Winkel um R aufsummiert, sieht man, dass $\eta = 90^\circ + \psi$. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass der Punkt R Inkreismittelpunkt des Dreieckes AWB ist (dies sieht man aus Fig. 5, wenn man Euklid I.32 auf die Dreiecke ABW und ABR anwendet). Also sind die unteren beiden Winkel in A und in B jeweils gleich gross. Wendet man das gleiche Argument rund um das Dreieck herum an, dann sieht man, dass

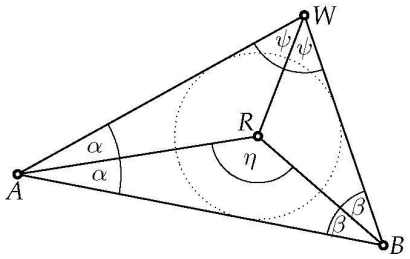

Fig. 5

überall alle *drei* Winkel gleich sein müssen. Weiter ist

$$\delta = \alpha + \beta, \qquad \epsilon = \beta + \gamma, \qquad \zeta = \gamma + \alpha$$

(etwa ist δ ein Aussenwinkel des Dreieckes ABR), so dass man genügend Freiheit hat, um alle Winkelkombinationen α, β, γ, welche (1) erfüllen, auf diese Weise zu erzeugen. □

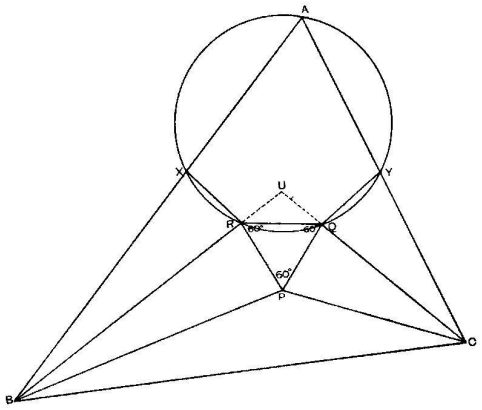

Fig. 6 Beweis von Child (kopiert aus [1])

Hybridbeweise. Zum Schluss weisen wir noch auf die drei Beweise in [1], [5] und [8] hin, welche wir „Hybridbeweise" nennen wollen, denn sie vermischen Ideen eines Vorwärtsbeweises mit jenen eines Rückwärtsbeweises. Es wird nämlich von *zwei* Ecken des Dreieckes, etwa B und C, mit seinen Winkeldreiteilenden ausgegangen. Dann erhält man als erstes den Schnittpunkt P. Nun entsteht als nächstes das gleichseitige Dreieck PQR, etwa mit Hilfe der bekannten Winkel in (2) (so geschieht es in [1] und [5]; siehe Fig. 6 und Fig. 7), oder mit Hilfe der gleichschenkligen Dreiecke (siehe [8]), welche wir im Beweis von Penrose und Coxeter kennengelernt hatten. Als letztes erscheint dann der dritte Punkt A, wobei zum Nachweis dessen Existenz wieder neuer Scharfsinn nötig ist, auf der Bühne. In *einem* Falle, siehe da, kommt auch „Euclid Bk. III" zum Einsatz (siehe Fig. 6).

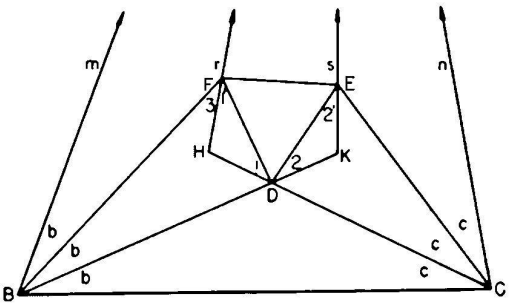

Fig. 7 Beweis von Grossmann (kopiert aus [5])

Diese Beweise sind vielleicht logisch etwas beruhigender, aber dadurch, dass bei verschiedenen Ecken verschiedene Argumentationen gebraucht werden, insgesamt komplizierter.

Danksagung. Der Autor bedankt sich bei dem Referee für wertvolle Verbesserungsvorschläge, bei Ch. Aebi (Genève) für einen wichtigen Literaturhinweis, und bei B. Dudez, Bibliothekar in Genève, für seine grosse Fähigkeit, seltene und seltenste Artikel aufzutreiben.

Literatur

[1] Child, J.M.: Proof of "Morley's theorem" (by Euclid, Bk. III). *Math. Gazette* 11 (1923), 171.

[2] Coxeter, H.S.M.: *Introduction to Geometry*. John Wiley, 1961.

[3] Euclid: *The thirteen books of the Elements*. Transl. and comm. by Sir Thomas L. Heath, 1925, reprinted Dover 1956.

[4] Geiges, H.: Beweis des Satzes von Morley nach A. Connes. *Elem. Math.* 56 (2001), 137–142.

[5] Grossmann, H.D.: The Morley triangle: a new geometric proof. *Amer. Math. Monthly* 50 (1943), 522.

[6] Penrose, R.: Morley's trisector theorem. *Eureka* 16 (1953), 6–7.

[7] Taylor, F.G.; Marr, W.L.: The six trisectors of each of the angles of a triangle. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 32 (1913), 119–131.

[8] Venkatachaliengar, K.: An elementary proof of Morley's theorem. *Amer. Math. Monthly* 65 (1958), 612–613.

Gerhard Wanner
Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH-1211 Genève 24, Schweiz
e-mail: `Gerhard.Wanner@math.unige.ch`