Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 59 (2004)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 59 (2004) 37 – 43
0013-6018/04/030037-7
DOI 10.1007/s00017-003-1203-y

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. August 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1203: Wir betrachten magische 3×3-Quadrate mit positiv-ganzzahligen Einträgen, bei denen die Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen je 2004 betragen.

1. Wie viele solche Quadrate gibt es?
2. Jetzt sollen Quadrate, die durch Drehung oder Achsenspiegelung ineinander übergeführt werden können, als nicht wesentlich verschieden gelten. Wie viele wesentlich verschiedene Quadrate gibt es?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1204: Es seien m und n natürliche Zahlen mit $m < 2n$. Beweise:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sin\left(\frac{2\ell-1}{2n} m\pi\right) \cdot \tan\left(\frac{2\ell-1}{4n}\pi\right) = (-1)^{m-1} \cdot n$$

Friedhelm Götze, Jena, D

Aufgabe 1205 (Die einfache dritte Aufgabe): Die aus dem Schulunterricht bekannte Aufgabe „Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang maximale Fläche?“ wird wie folgt verallgemeinert: Aus einer rechteckigen Blechplatte mit den Seitenlängen $a \cdot x$ und y, $a > 1$, müssen $m \geq 0$ Quadrate der Seitenlänge x und $n \geq 0$ Kreise mit dem Durchmesser x ausgestanzt werden. Wie sind x und y zu wählen, damit bei gegebener Umrandungslänge u die Fläche der Restfigur maximal wird? Man zeige auch, dass das überlappungsfreie Ausstanzen der $m + n$ Figuren dann wirklich möglich ist.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2003

Aufgabe 1190. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine wachsende differenzierbare Funktion. Beweise, dass

$$\sum_{\ell=1}^{n} \int_0^{nx_\ell-(x_1+x_2+\cdots+x_n)} f\left(x_\ell - \frac{t}{n-1}\right) \mathrm{d}t \geq 0,$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ beliebige reelle Zahlen sind.

Mihály Bencze, Sacele, RO

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Lösungen eingetroffen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Wir folgen der Lösung von *Christian Blatter*, die weitgehend mit jener von *Peter Bundschuh* übereinstimmt:

Setze zur Abkürzung $s_j := \frac{1}{n-1} \sum_{\ell \neq j} x_\ell$, wobei hier und im Folgenden der Summationsindex von 1 bis n läuft. Damit wird

$$\int_0^{nx_j-(x_1+\cdots+x_n)} f\left(x_j - \frac{t}{n-1}\right) \mathrm{d}t = (n-1) \int_{s_j}^{x_j} f(t')\, \mathrm{d}t'.$$

Da f monoton wächst, ist die Funktion $F(x) := \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ konvex, und die Jensensche Ungleichung liefert

$$F(s_j) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{\ell \neq j} F(x_\ell) \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Damit ergibt sich wie behauptet

$$\sum_j \int_{s_j}^{x_j} f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_j (F(x_j) - F(s_j)) \geq \sum_j F(x_j) - \frac{1}{n-1} \sum_j \sum_{\ell \neq j} F(x_\ell) = 0.$$

Aufgabe 1191. Bei gegebenen verschiedenen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und beliebig vorgegebenen Zahlen $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ soll für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n}{}^{*} x_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot c_{i_3} \cdot \ldots \cdot c_{i_k} = (-1)^{k-1} p_{n-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aufgelöst werden, wenn das für $k = 1$ auftretende leere Produkt 1 gesetzt wird und die mit $*$ bezeichnete Summation auf voneinander verschiedene Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n$ und $i_2 < i_3 < \cdots < i_k$ beschränkt wird.

Wie lautet die Lösung für die spezielle Wahl $c_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $p_k = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Lajos László (Budapest, H).

Die abgedruckte Lösung wurde von der Redaktion aus den verschiedenen Einsendungen zusammenkomponiert: Will man von der durch

$$f(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-1} x^{n-1}}{(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)}$$

gegebenen Funktion mittels des Ansatzes

$$\frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{n-1} x^{n-1}}{(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)} = \frac{x_1}{x - c_1} + \frac{x_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{x_n}{x - c_n}$$

die Partialbruchzerlegung bestimmen, addiert man die rechts stehende Summe durch Gleichnamigmachen der Brüche. Der Zähler der Summe besitzt vorerst die Form

$$x_1 \cdot \prod_{i \neq 1} (x - c_i) + x_2 \cdot \prod_{i \neq 2} (x - c_i) + \cdots + x_n \cdot \prod_{i \neq n} (x - c_i). \tag{1}$$

Setzt man in den beiden Zählern $x = c_\ell$ ein, so ergibt sich durch Vergleichen

$$p_0 + p_1 c_\ell + p_2 c_\ell^2 + \cdots + p_{n-1} c_\ell^{n-1} = x_\ell \cdot \prod_{i \neq \ell} (c_\ell - c_i)$$

oder

$$x_\ell = \frac{p_0 + p_1 c_\ell + p_2 c_\ell^2 + \cdots + p_{n-1} c_\ell^{n-1}}{\prod_{i \neq \ell} (c_\ell - c_i)}. \tag{2}$$

Sortiert man das Polynom (1) vor dem Koeffizientenvergleich nach Potenzen von x, so liefert der Vergleich das reguläre Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + \cdots + & x_n & = & p_{n-1} \\ \Big(\sum\limits_{\ell \neq 1} c_\ell\Big) \cdot x_1 & + & \Big(\sum\limits_{\ell \neq 2} c_\ell\Big) \cdot x_2 & + \cdots + & \Big(\sum\limits_{\ell \neq n} c_\ell\Big) \cdot x_n & = & -p_{n-2} \\ \Big(\sum\limits_{\substack{\ell<j \\ \ell,j \neq 1}} c_\ell c_j\Big) \cdot x_1 & + & \Big(\sum\limits_{\substack{\ell<j \\ \ell,j \neq 2}} c_\ell c_j\Big) \cdot x_2 & + \cdots + & \Big(\sum\limits_{\substack{\ell<j \\ \ell,j \neq n}} c_\ell c_j\Big) \cdot x_n & = & p_{n-3} \\ \vdots & + & \vdots & + \vdots + & \vdots & = & \vdots \end{array} \right|,$$

welches übereinstimmt mit dem Gleichungssystem der Aufgabenstellung. Somit sind die durch (2) gegebenen Werte die Lösung des Systems.

Setzt man in (2) die speziellen Werte $c_\ell = \ell$ und $p_k = 1$ ein, so ergibt sich

$$x_1 = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{(n-1)!} \quad \text{und} \quad x_\ell = \frac{(-1)^{n-\ell} \cdot (\ell^n - 1)}{(\ell-1)(n-\ell)!(\ell-1)!} \quad \text{für} \quad \ell = 2, 3, \ldots, n.$$

Aufgabe 1192 (Die einfache dritte Aufgabe). Zeige, dass die natürlichen Zahlen a_n, deren Quadrate Dreieckszahlen sind, für $n \to \infty$ gegen eine geometrische Folge streben.

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Lajos László (Budapest, H), Harald Merk (Biberach, D), Daniel Neuenschwander (Bern, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH),

Wir folgen der Lösung von *Friedhelm Götze*, welche weitgehend mit den meisten eingesandten Lösungen übereinstimmt: Die Frage, für welche natürliche Zahl k der Ausdruck $k(k+1)/2$ eine Quadratzahl a_n^2 ist, führt zur Gleichung

$$\frac{k(k+1)}{2} = a_n^2 \Longleftrightarrow (2k+1)^2 - 8a_n^2 = 1. \tag{1}$$

Man hat also in

$$x^2 - 8y^2 = 1 \quad \text{mit} \quad x = 2k+1, \quad y = a_n, \tag{2}$$

einen Sonderfall der Pellschen Gleichung. Ihre kleinste Lösung ist $(x_1, y_1) = (3, 1)$, und die wohl bekannte Theorie liefert alle Lösungen:

$$x_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n}{2}, \quad y_n = a_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}. \tag{3}$$

Für grosse Werte n zeigen die a_n wegen

$$a_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(3+\sqrt{8})^{2n}}\right)$$

dasselbe asymptotische Verhalten wie die geometrische Folge

$$b_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}, \quad \text{denn} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Ergänzung zu der Lösung von Aufgabe 1175 (Heft 4, 2002, Seiten 176 und 177).

Für $n \in \mathbb{N}$ und $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^i}\right)$. Man beweise oder widerlege die Behauptung: Zu jedem n gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten a_j $(j = 2n, 2n+1, \ldots, 2^n)$ und b_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, so dass

$$1 + \frac{1}{p_n(x)} \cdot \sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1-x)^{j-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{1 + x^{2^k}}.$$

Friedhelm Götze, Jena, D

Zu dieser Aufgabe ist erst eine Teillösung erschienen. Jany C. Binz (Bolligen, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D) und Gerhard Wanner (Genève, CH) haben sich weitere Gedanken gemacht. *Gerhard Wanners* Methode ist die einfachste; sie nimmt Bezug auf die in Heft 4, 2002, erschienene Teillösung: Die Idee ist, den Faktor $p_n(x)$ *nicht* hinaufzumultiplizieren, sondern ihn in die Summe $\sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1-x)^{j-1}$ zu integrieren. Mit

$$f(x) := \frac{1}{p_n(x)} \cdot \sum_{j=2n}^{2^n} a_j \cdot (1-x)^{j-1}$$

erhält die Gleichung der Aufgabenstellung die Form

$$1 + f(x) = b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + b_2 g_2(x) + \cdots + b_{n-1} g_{n-1}(x),$$

wobei wir wissen, dass an der Stelle $x = 1$ der Funktionswert von $f(x)$ und alle Ableitungen bis zur Ordnung $2n-2$ Null sind. Die Funktionen g_i sind von der Form

$$g_i(x) = \frac{1}{x^m + 1} \quad (m = 2^i)$$

mit

$$g(1) = \frac{1}{2}, \quad g'(1) = -\frac{m}{4}, \quad g''(1) = \frac{m}{4}, \quad g'''(1) = \frac{1}{8}m^3 - \frac{1}{2}m,$$

$$g''''(1) = -\frac{3}{4}m^3 + \frac{3}{2}m, \quad g'''''(1) = -\frac{1}{4}m^5 + \frac{35}{8}m^3 - 6m, \ldots$$

Jetzt brauchen wir nur diese Werte in die obige Gleichung einzusetzen. Für die Funktionswerte erhalten wir nach Multiplikation mit 2

$$2 = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}.$$

Für die erste Ableitung ergibt sich nach Muliplikation mit -4

$$0 = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + \cdots + 2^{n-1} b_{n-1}.$$

Die zweiten Ableitungen sind tatsächlich Vielfache der ersten, und wir können diese Gleichung weglassen. Für die dritte Ableitung brauchen wir nur den Term m^3 zu behalten, da das m bereits in der ersten Ableitung vorkommt:

$$0 = b_0 + 2^3 b_1 + 4^3 b_2 + \cdots + (2^{n-1})^3 b_{n-1}.$$

Die vierten Ableitungen sind wieder Linearkombinationen der dritten und ersten. Für die fünften müssen wir

$$0 = b_0 + 2^5 b_1 + 4^5 b_2 + \cdots + (2^{n-1})^5 b_{n-1}$$

hinzufügen; und so geht das auch im allgemeinen Fall weiter. Das ist genau so, wie es vom Aufgabenredaktor (Seite 177) vermutet wurde.

Jetzt braucht es natürlich einen Beweis dafür, dass *alle* Ableitungen von g an der Stelle 1 die obige Form haben, mit Polynomen in m und nur ungeraden Exponenten. Bevor wir uns zu Tode differenzieren, schreiben wir

$$g(x)h(x) = 1 \quad \text{mit} \quad h(x) = x^m + 1, \quad h = 2,$$

$$h' = m, \quad h'' = m(m-1), \quad h''' = m(m-1)(m-2), \ldots$$

an der Stelle $x = 1$. Nun ist nach Leibniz

$$\begin{gathered} gh = 1 \\ g'h + gh' = 0 \\ g''h + 2g'h' + gh'' = 0 \\ g'''h + 3g''h' + 3g'h'' + gh''' = 0 \\ \ldots \quad \ldots \end{gathered}$$

Hier könnten wir die Ableitungen $g', g'', \ldots$ der Reihe nach ausrechnen. (Wir sehen bereits, dass es Polynome in m sind.) Aber wir machen es eleganter, mit einer Idee, die von Euler stammt:

Mit den Zahlen

$$\alpha_0 = g, \quad \alpha_1 = g', \quad \alpha_2 = g'', \quad \ldots \qquad \beta_0 = h, \quad \beta_1 = h', \quad \beta_2 = h'', \quad \ldots$$

setzen wir die symbolischen Reihen an

$$A(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}t + \frac{\alpha_2}{2!}t^2 + \cdots, \qquad B(t) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}t + \frac{\beta_2}{2!}t^2 + \cdots$$

Nun besagt obige Leibnizregel einfach, dass

$$A(t) \cdot B(t) = 1$$

ist, und der binomische Lehrsatz mit den obigen Werten der β's liefert

$$B(t) = 2 + \frac{m}{1!}t + \frac{m(m-1)}{2!}t^2 + \cdots = 1 + (1+t)^m.$$

Also ist $A(t) = \frac{1}{1+(1+t)^m}$, oder entwickelt

$$A(t) = \frac{1}{2} - \frac{m}{4} \cdot \frac{t}{1!} + \frac{m}{4} \cdot \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{1}{8}m^3 - \frac{1}{2}m\right) \cdot \frac{t^3}{3!} + \left(-\frac{3}{4}m^3 + \frac{3}{2}m\right) \cdot \frac{t^4}{4!} + \cdots,$$

und wir sehen die obigen Ableitungen erscheinen. Ersetzen wir jetzt m durch $-m$, so ergibt sich

$$\frac{1}{1+(1+t)^{-m}} = \frac{(1+t)^m}{(1+t)^m+1} = 1 - \frac{1}{1+(1+t)^m}.$$

Wir sehen, dass $A(t)$ mit Ausnahme des Termes $\frac{1}{2}$ eine ungerade Funktion in m ist, und der Beweis ist somit geführt.