Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **59 (2004)**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 59 (2004) 83 – 86
0013-6018/04/030083-4
DOI 10.1007/s00017-004-1206-3

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen erbeten bis zum 10. November 2004 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1206: Die Folge (a_n) sei durch die Startwerte a_1, a_2 und die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ definiert. Berechne für $n > 4$ – in Abhängigkeit von den Startwerten – die Determinante

$$D_n(x) := \begin{vmatrix} a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & x \end{vmatrix}.$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

Aufgabe 1207: Beweise, dass für positive Zahlen x, y, z die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Aufgabe 1208 (Die einfache dritte Aufgabe): Beweise: Ist x eine nicht-ganzzahlige reelle Zahl, so gilt

$$\frac{1}{\pi} \cdot \arctan(\cot(\pi \cdot x)) + x - \frac{1}{2} = [x].$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leq x$.

Harald Merk, Biberach, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2003

Aufgabe 1193. Durch Hintereinanderschreiben der Glieder der rekursiv gegebenen Folgen

$$\begin{array}{ccc} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n & & b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \\ & \text{und} & \\ a_1 = a_2 = 1 & & b_1 = 1, \quad b_2 = 3 \end{array}$$

bilden wir die beiden nichtabbrechenden Dezimalzahlen

$$a = 0.112358111321\ldots \qquad \text{und} \qquad b = 0.134711182947\ldots$$

Man zeige, dass a und b irrational sind.

Ernst Herrmann, Siegburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Bonn, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Bern, CH), eine gemeinsame Lösung von Günter Köhler (Würzburg, D) und Jürgen Spilker (Freiburg, D), Harald Merk (Biberach, D), Daniel Neuenschwander (Bern, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH).

Fast alle Einsender argumentieren wie *Gerhard Wanner* und benützen (oder beweisen) ein Ergebnis aus einem in den Elementen (Band 58, pp. 26–33) erschienenen Artikel von Jürgen Spilker: Folgen mit $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ besitzen die Eigenschaft, dass zu vorgegebener Ziffernzahl mindestens vier Folgenglieder existieren.

Wären a oder b rational, dann müsste der Dezimalbruch ab einer gewissen Ziffer periodisch werden, sagen wir mit Periode m. Liegen die vier a_ℓ, welche m Ziffern besitzen, im periodischen Bereich, dann sind also alle vier identisch, was ein Widerspruch ist. Ansonsten muss man m verdoppeln, verdreifachen usw. bis der Widerspruch entsteht.

Aufgabe 1194. Bei einer Sportveranstaltung, an welcher n Sportler teilnehmen, werden die besten r Sportler $(r \leq n)$ in die Rangliste aufgenommen. Vorausgesetzt, dass die besten r Teilnehmer unterschiedlich gut abgeschnitten haben, gibt es $n!/(n-r)!$ mögliche Ranglisten. Sind jedoch mehrere Teilnehmer ex aequo plaziert, so werden die darauffolgenden Ränge nicht vergeben; bei $r = 4$ Rängen sind die Rangfolgentypen 1111, 1114, 1133, 1134, 1222, 1224, 1233, 1234 möglich. Hingegen sind 1122 oder 1113 keine möglichen Rangfolgentypen.

Bestimme die Anzahl $b(n,r)$ von möglichen Ranglisten.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 4 Zuschriften eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Fritz Siegerist (Meilen, CH).

Bernhard Ruh bestimmt zuerst die Anzahl der Ranglistentypen: Jedem Ranglistentyp mit r klassierten Personen entspricht bijektiv eine geordnete Partition der Zahl r. Beispielsweise entspricht (für $r = 4$) der Partition $1+3$ der Typ 1222 und der Partition $2+1+1$

der Typ 1134. Diese Zahlen sind in der Literatur als geordnete Bellsche Zahlen $B(r)$ bekannt. Sie können rekursiv mit

$$B(0) = 1, \qquad B(r) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r}{\ell} \cdot B(\ell)$$

oder mit der Summenformel

$$B(r) = \sum_{\ell=1}^{r} \ell! \cdot S(r, \ell),$$

wobei $S(r, \ell)$ die Stirlingschen Zahlen zweiter Art bezeichnen, berechnet werden. Zudem treten sie auf als Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{2 - e^x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B(r)}{r!} \cdot x^r.$$

Weil für $n \geq r$ sich die r qualifizierten Sportler auf $\binom{n}{r}$ Arten auswählen lassen, gibt es also

$$\binom{n}{r} \cdot B(r)$$

mögliche Ranglisten.

Walther Janous gibt mit

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html`

eine Quelle an, unter welcher sich so ziemlich alles Bekannte zu dieser Ranglistenfrage finden lässt.

Fritz Siegerist kritisiert, dass bei der Auswahl der Rangierten vorausgesetzt wird, dass sie besser sind als die Übrigen, dass sie aber unter sich gleich gut sein dürfen.

Aufgabe 1196 (Die einfache (?) dritte Aufgabe). In einem vom Wendepunkt verschiedenen Punkt A einer kubischen Parabel legen wir die Tangente t_A; sie hat mit der Kurve noch einen weiteren Punkt B gemeinsam. Mit F_1 bezeichnen wir den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der Kurve und t_A eingeschlossen wird. Im Punkt B legen wir nun die Kurventangente t_B, welche die kubische Parabel noch in C schneidet; das von der Kurve und t_B begrenzte endliche Flächenstück besitze den Inhalt F_2.

a) Wie gross ist das Verhältnis F_1/F_2?

b) Wie lässt sich das Ergebnis auf Graphen von Polynomen vom Grad $n > 3$ verallgemeinern?

Hans Rudolf Schneebeli, Wettingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Zuschriften eingegangen: Hans Egli (Zürich, CH), Stefan Gmünder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), André Kiener (Oberdorf, CH), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH), Hansklaus Rummler (Freiburg, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Nicht alle Löser sind auf die Idee gekommen, bei Aufgabe b) die Tangente durch das Taylorpolynom vom Grad $n-2$ zu ersetzen.

Wir folgen der Lösung von *André Kiener*: Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k$ ein Polynom vom Grad n. Wir schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot (x-a)^k \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere ist $\alpha_n = c_n$ und $\alpha_{n-1} = c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a$.

Der Graph des Taylorpolynoms $t_a(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \cdot (x-a)^k$ schneidet den Graphen von f ausser an der Stelle a auch bei

$$b = a - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = a - \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_n},$$

denn

$$f(x) - t_a(x) = (x-a)^{n-1}(\alpha_{n-1} + \alpha_n(x-a)).$$

Der Inhalt des endlichen Flächenstückes zwischen den Graphen von f und t_a misst also

$$\begin{aligned} F(a) &= \left| \int_a^b (f(x) - t_a(x))\,\mathrm{d}x \right| = \left| \alpha_{n-1} \cdot \frac{(b-a)^n}{n} + \alpha_n \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \right| \\ &= \left| (b-a)^n \cdot \left(\frac{\alpha_{n-1}}{n} + \frac{\alpha_n}{n+1}\left(-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right) \right) \right| = \left| (b-a)^n \cdot \alpha_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right| \\ &= \left| \frac{(\alpha_{n-1})^{n+1}}{n(n+1)(\alpha_n)^n} \right| = \left| \frac{(c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a)^{n+1}}{n(n+1)(c_n)^n} \right|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{F(a)}{F(b)} &= \left| \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot b} \right|^{n+1} \\ &= \left| \frac{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a}{c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a - n \cdot (c_{n-1} + n \cdot c_n \cdot a)} \right|^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Für $n = 3$ ergibt sich $\dfrac{F(a)}{F(b)} = \dfrac{1}{16}$.