Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **60 (2005)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 60 (2005) 82 – 85
0013-6018/05/020082-4

© Swiss Mathematical Society, 2005

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. November 2005 erbeten und können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH-5415 Nussbaumen

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Neue Aufgaben

Aufgabe 1218: Alice und Bruno haben beide je einen Einfränkler und einen Zweifränkler in ihren Hosentaschen. Beide klauben (wirklich) zufällig je eine Münze heraus und zeigen sie einander vor. Haben die vorgezeigten Münzen den gleichen Wert, wandert das Geld in die Taschen der beiden zurück; haben die Münzen verschiedene Werte, so wandern beide Münzen in die Tasche derjenigen Person, welche den Zweifränkler vorgezeigt hat. Dann kann mit der neuen Ausgangslage nach denselben Regeln eine weitere Runde gespielt werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden Kinder nach n Runden den gleichen Geldbetrag in ihren Taschen, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alice nach n Runden einen grösseren Betrag als Bruno, und gegen welche Werte streben diese Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1219: Im ebenen Gitter betrachten wir Minimalwege von $(0, 0)$ nach (n, n), welche mit dem Schritt $(1, 0)$ starten und die Gerade $y = x$ genau k Mal überqueren. Man bestimme für $k = 1, 2, 3$ deren Anzahl $a(n, k)$.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1220 (Die einfache dritte Aufgabe):

a) Auf der Peripherie des Einheitskreises befinde sich das Zentrum eines zweiten Kreises. Wie gross muss dessen Radius ϱ sein, damit der Inhalt des innerhalb beider Kreise liegenden Flächenstückes halb so gross ist wie der Inhalt des Einheitskreises?

b) Die Zweikreisefigur von Aufgabe a) rotiere jetzt um die Zentrale, so dass zwei sich durchdringende Kugeln entstehen. Wie gross muss der Radius ϱ jetzt sein, damit das Volumen des Durchdringungskörpers halb so gross ist wie das Volumen der Einheitskugel?

Walter Vetsch, St. Gallen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 2004

Aufgabe 1206. Die Folge (a_n) sei durch die Startwerte a_1, a_2 und die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ definiert. Berechne für $n > 4$ – in Abhängigkeit der Startwerte – den Wert $D_n(x)$ der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & x \end{vmatrix}.$$

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingetroffen: Gerhard Bachmaier (Graz, A), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen den Überlegungen von *Michael Vowe*: Für $n = 5$ ist mit den beiden Startwerten a_1 und a_2 die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 & 2a_1 + 3a_2 & 3a_1 + 5a_2 \\ 5a_1 + 8a_2 & 8a_1 + 13a_2 & x \end{vmatrix}.$$

zu bestimmen. Sie hat den Wert

$$\begin{aligned} D_5(x) = \tilde{D}_5(a_1, a_2, x) &= 2(a_2^2 - a_1a_2 - a_1^2)(13a_1 + 21a_2 - x) \\ &= 2(a_2^2 - a_1a_2 - a_1^2)(a_1f_7 + a_2f_8 - x), \end{aligned}$$

wobei mit f_n die üblichen Fibonacci-Zahlen bezeichnet werden ($f_1 = f_2 = 1$).
Weil die Substitution

$$a_1 \longmapsto a_2, \qquad a_2 \longmapsto a_1 + a_2$$

beim Term $a_2^2 - a_1a_2 - a_1^2$ nur das Vorzeichen ändert und den Ausdruck $a_1f_n + a_2f_{n+1}$ in $a_1f_{n+1} + a_2f_{n+2}$ überführt, ergibt sich unter Berücksichtigung von $\tilde{D}_{n+1}(a_1, a_2, x) = \tilde{D}_n(a_2, a_1 + a_2, x)$ sofort durch Induktion

$$D_n(x) = \tilde{D}_n(a_1, a_2, x) = (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot (a_2^2 - a_1a_2 - a_1^2)(a_1f_{n+2} + a_2f_{n+3} - x).$$

Aufgabe 1207. Beweise, dass für positive Zahlen x, y, z die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BIH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 24 Zuschriften eingetroffen: Lutz Andrews (Röthenbach, D), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), Harald Merk (Biberach, D), Bernhard Ruh (Zuchwil, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Christoph Soland (Belmont, CH), Eckard Specht (Magdeburg, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Im Wesentlichen zerfallen die Lösungen in zwei Gruppen: Entweder wird nach geschicktem Umordnen die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel dreier Zahlen verwendet, oder es wird die Konvexität gewisser passend konstruierter Funktionen ausgenützt.

Wir geben je eine typische Lösung. *Eckard Specht* und *Bernhard Ruh* argumentieren so:

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\\ &\geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\\ &= \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}=\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.\end{aligned}$$

Eine die zweite Lösungskategorie repräsentierende Lösung ist zu *Harald Merk* gelangt; vermutlich stammt sie von einem Mathematiker der Universität Bordeaux.

Durch Multiplizieren mit xyz erhält man die äquivalente Ungleichung

$$x^2z+y^2x+z^2y \geq x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}z^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{5}{3}}. \tag{1}$$

Die Funktion

$$t \overset{f}{\longmapsto} x^{t+1}\cdot y^{2-2t}\cdot z^t + x^t\cdot y^{t+1}\cdot z^{2-2t} + x^{2-2t}\cdot y^t\cdot z^{t+1}$$

ist wie jede Funktion der Art

$$t \longmapsto \sum_{\ell} c_\ell \lambda_\ell^t, \qquad c_\ell > 0,\ \lambda_\ell > 0,$$

konvex. Aus der Konvexität folgt nun

$$\frac{1}{3}\cdot f(0)+\frac{1}{3}\cdot f(1)+\frac{1}{3}\cdot f(1)\geq f\left(\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 1\right),$$
$$\frac{1}{3}\left(f(0)+2\cdot f(1)\right)\geq f\left(\frac{2}{3}\right). \tag{2}$$

Die Ungleichungen (1) und (2) stimmen aber überein.

Aufgabe 1208 (Die einfache dritte Aufgabe). Beweise: Ist x eine nicht-ganzzahlige reelle Zahl, so gilt

$$\frac{1}{\pi}\cdot\arctan(\cot(\pi\cdot x))+x-\frac{1}{2}=[x].$$

Dabei bezeichnet $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leq x$.

Harald Merk, Biberach, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 22 Zuschriften eingegangen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Gheorghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Oleg Faynshteyn (Leipzig, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Stefan Grieder (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Caroline Ryser (Langenbruck, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Christoph Soland (Belmont, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Walter Vetsch (St. Gallen), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen *Albert Stadler*, dessen Lösung mit jener von *Christoph Soland* vollständig übereinstimmt, und deren Idee in fast allen Einsendungen auftaucht: Weil in der Gleichung

$$\frac{1}{\pi}\cdot\arctan(\cot(\pi\cdot x))=\frac{1}{2}+([x]-x)$$

sowohl $\cot(\pi\cdot x)$ als auch $[x]-x$ Funktionen der Periode 1 sind, dürfen wir $0<x<1$ annehmen, und wir müssen nur beweisen, dass

$$\frac{1}{\pi}\cdot\arctan(\cot(\pi\cdot x))=\frac{1}{2}-x \qquad \text{für } \ 0<x<1.$$

Nun ist $\cot(\pi\cdot x)=\tan\left(\pi/2-\pi\cdot x\right)$, und mit

$$\frac{1}{\pi}\cdot\arctan(\cot(\pi\cdot x))=\frac{1}{\pi}\cdot\arctan(\tan(\pi/2-\pi\cdot x))=\frac{1}{2}-x$$

folgt die Behauptung. (Beim letzten Gleichheitszeichen wird die Voraussetzung $0<x<1$ verwendet.)