Note on the diophantine equation: [Formel]

Autor(en): **Müller, Tom**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **60 (2005)**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10205

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 60 (2005) 148 – 149
0013-6018/05/040148-2

© Swiss Mathematical Society, 2005

Elemente der Mathematik

Note on the diophantine equation $1 + 2p + (2p)^2 + \cdots + (2p)^n = y^p$

Tom Müller

Tom Müller ist 25jährig. Er studierte Mathematik an den Universitäten Zürich und Trier. Seine Interessen liegen in der Analysis, der Zahlentheorie sowie der Mathematik-Geschichte.

In a note published in 1987, A. Rotkiewicz [2] showed that repunits, i.e., numbers of the form $111\ldots11 = 1 + 10 + \cdots + 10^n$, are never squares or cubes for $n \geq 1$. He did this using a more general result on the diophantine equations $1 + x + \cdots + x^n = y^2$ and $1 + x + \cdots + x^n = y^3$ proved by W. Ljunggren in 1943 [1].

The following result implies that repunits are never fifth powers of integer numbers as well.

Theorem. *Let p be an odd prime number or a Carmichael number and let $n \in \mathbb{N}$. Then, the diophantine equation $1 + 2p + (2p)^2 + \cdots + (2p)^n = y^p$ has no solution y.*

Proof. For $n = 1$ the diophantine equation gives

$$1 + 2p = y^p. \tag{1}$$

Because of $y^p \equiv 1 \bmod p$, y cannot be a multiple of p. Moreover, Fermats little theorem gives $y^p \equiv y \bmod p$. Therefore, y has to be of the form $y = pk + 1$ with a $k \in \mathbb{N}_0$. Hence, the Bernoulli inequality implies $1 + 2p = y^p \geq 1 + p^2k$, i.e., $2 \geq pk$. This is possible only if $k = 0$ (and $y = 1$) contradicting (1).

„Repunits“ sind Zahlen mit lauter Einsen: 1, 11, 111, 1111, ... Es ist bekannt, dass sie niemals Quadrate oder Kubikzahlen sein können. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sie auch keine fünfte Potenzen sein können. Dies ist der Spezialfall $p = 5$ des hier durch Kongruenzschlüsse bewiesenen Satzes, dass die im Titel genannte Gleichung keine Lösungen n, y in positiven ganzen Zahlen hat, wenn p eine ungerade Primzahl, oder allgemeiner eine ungerade Zahl ist, für die der kleine Fermatsche Satz in der Form $x^p \equiv x \pmod{p}$ für alle x gilt.

Suppose now that there is an $n > 1$ leading to the solution $y \in \mathbb{Z}$. Then the two congruences

$$y^p \equiv 1 \bmod 2p \tag{2}$$

and

$$y^p \equiv 2p + 1 \bmod (2p)^2 \tag{3}$$

have to be fulfilled simultaneously. To get equation (2), y must be of the form $(2p)k + 1$ with a $k \in \mathbb{Z}$. This can be seen writing $y = 2pk + r$ with $k \in \mathbb{Z}$ and $r \in \{0, 1, \ldots, 2p-1\}$. Then

$$(2pk + r)^p \equiv r^p \bmod 2p$$

and again with Fermat

$$(2pk + r)^p \equiv r \bmod p,$$

leading to $y^p = 2pl + r^p$ and $y^p = pm + r$ with $l, m \in \mathbb{Z}$. As r and r^p are both either odd or even, pm is a multiple of 2 and therefore, m is an even number. Hence, $y^p \equiv 1 \equiv r \bmod 2p$, and so $r = 1$.

Using the binomial formula we obtain $y^p = (2pk + 1)^p \equiv 2p^2k + 1 \bmod (2p)^2$. Then an even k leads to $y^p \equiv 1 \bmod (2p)^2$, while we get $y^p \equiv 2p^2 + 1 \bmod (2p)^2$ with k odd. Considering the inequality $1 < 2p + 1 < 2p^2 + 1 < (2p)^2$ this contradicts the congruence (3). Therefore, the assumed n does not exist. □

Choosing $p = 5$, the diophantine equation $1 + 10 + \cdots + 10^n = y^5$ has no solution, and so the numbers $11, 111, 1111, \ldots$ are never fifth powers of integer numbers.

References

[1] Ljunggren, W.: Noen setninger om ubestemte likninger av formen $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Norsk Mat. Tidsskr.* 25 (1943), 17–20.

[2] Rotkiewicz, A.: Note on the diophantine equation $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = y^m$. *Elem. Math.* 42 (1987), 76.

Tom Müller
Institut für Cusanus-Forschung
an der Universität und der
Theologischen Fakultät Trier
D-54290 Trier, Deutschland
e-mail: `muel4503@uni-trier.de`